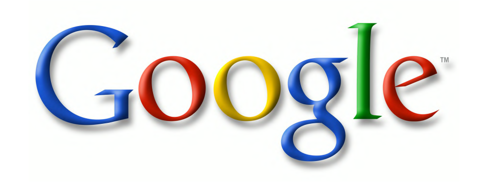
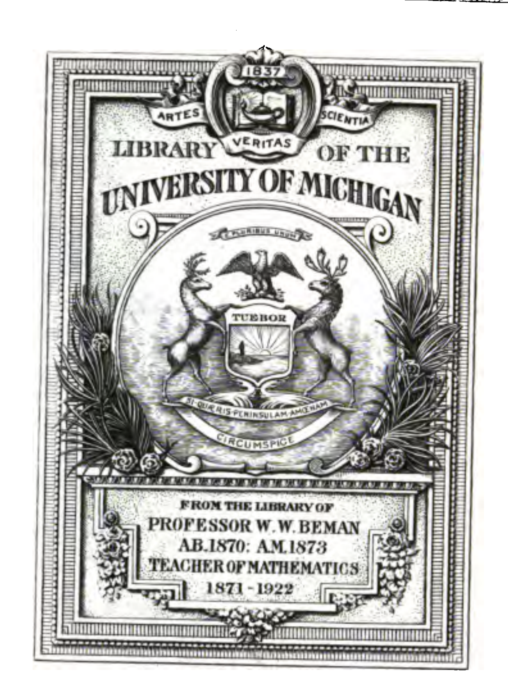
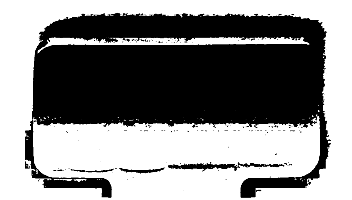



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
AB.1870: AM.1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 - 1922



EXERCICES DE CALCUL INTÉGRAL.

EXERCICES

DE

CALCUL INTÉGRAL

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE L'ÉCOLE DES MINES,

PAR

Joseph GRAINDORGE,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE LIÈGE.

DEUXIÈME ÉDITION.

LIÈGE,

IMPRIMERIE H. VAILLANT-CARMANNE,

rue St-Adalbert, 8.

—

1885

EXERCICES DE CALCUL INTÉGRAL.

I. — Intégrales élémentaires.

$$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad \int \frac{dx}{x} = lx, \quad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{la},$$

$$\int e^x\,dx = e^x, \quad \int \cos x\,dx = \sin x, \quad \int \sin x\,dx = -\cos x,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x, \quad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,cos} x,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x, \quad \int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,cotg} x.$$

Remarque. — Je supprimerai, dans tous les exercices qui vont suivre, la constante arbitraire, comme je viens de le faire dans les formules précédentes.

II. — Intégrations immédiates.

1. $\int \frac{dx}{x^n} = \int x^{-n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} = -\frac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$.

2. $\int x\,(ax-b)^2\,dx = \int (a^2x^3 - 2\,ab\,x^2 + b^2x)\,dx$

$$= \frac{a^2x^4}{4} - \frac{2\,ab\,x^3}{3} + \frac{b^2x^2}{2}.$$

3. $\int \frac{a\,dx}{x^2 \sqrt[3]{x^2}} = a \int x^{-\frac{8}{3}}\,dx = -\frac{3}{5} a x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{3}{5} \frac{a}{x \sqrt[3]{x^2}}.$

4. $\int \frac{x^3 - 4x^2 + 5}{x} dx = \int x^2\,dx - 4\int x\,dx + 5\int \frac{dx}{x}$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5l\,x.$$

5. $\int \frac{n x^2 - p}{x \sqrt[3]{x}} dx = \int \left(nx^2 - p\right) x^{-\frac{4}{3}}\,dx = n \int x^{\frac{2}{3}}\,dx - p \int x^{-\frac{4}{3}}\,dx$

$$= \frac{3n\,x^{\frac{5}{3}}}{5} + 3\,p\,x^{-\frac{1}{3}} = \frac{3n\,x \sqrt[3]{x^2}}{5} + \frac{3p}{\sqrt[3]{x}}.$$

6. $\int \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x}\right)^2 dx = a^2 \int \frac{dx}{x^4} + 2\,a\,b \int \frac{dx}{x^3} + b^2 \int \frac{dx}{x^2}$

$$= -\frac{a^2}{3x^3} - \frac{a\,b}{x^2} - \frac{b^2}{x}.$$

7. $\int \sqrt{x}\left(x^2 + px + q\right) dx = \int x^{\frac{5}{2}}\,dx + p \int x^{\frac{3}{2}} dx + q \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$$= \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{2p\,x^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2q\,x^{\frac{3}{2}}}{3} = 2\,x \sqrt{x}\left(\frac{x^2}{7} + \frac{p\,x}{5} + \frac{q}{3}\right).$$

8. $\int \left(3\,x^5 + \frac{1}{2\,x^3} - 7 \sqrt[3]{x+1} + \frac{2}{\sqrt[5]{x^2}}\right) d\,x$

$$= 3\int x^5\,dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^3} - 7 \int (x+1)^{\frac{1}{3}}\,dx + 2\int x^{-\frac{2}{5}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} x^6 - \frac{1}{4\,x^2} - \frac{21\,(x+1)^{\frac{4}{3}}}{4} + \frac{10\,x^{\frac{3}{5}}}{3}$$

$$= \frac{1}{2} x^6 - \frac{1}{4\,x^2} - \frac{21\,(x+1) \sqrt[3]{x+1}}{4} + \frac{10 \sqrt[5]{x^3}}{3}.$$

9 $\int \sqrt[6]{x^5}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(2-\sqrt{x}\right)^2 dx = \int x^{\frac{5}{6}}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(4+x-4\sqrt{x}\right) dx$

$$=\int x^{\frac{5}{6}}\left(4+x\sqrt{x}-3x\right)dx=\int 4x^{\frac{5}{6}}dx+\int x^{\frac{14}{6}}dx-3\int x^{\frac{11}{6}}dx$$

$$=\frac{24x^{\frac{11}{6}}}{11}+\frac{6x^{\frac{20}{6}}}{17}-\frac{18x^{\frac{17}{6}}}{17}=\frac{24x\sqrt[6]{x^5}}{11}+\frac{3x^3\sqrt[3]{x}}{10}-\frac{18x^2\sqrt[6]{x^5}}{17}.$$

APPLICATIONS.

1. $\int\left(2x^4+3x^3-5x+4\right)dx=\frac{2x^5}{5}+\frac{3x^4}{4}-\frac{5x^2}{2}+4x.$

2. $\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{6}{x^4}-\frac{4}{x^5}\right)dx=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^4}.$

3. $\int\sqrt[3]{x^2}\,dx=\frac{3}{5}\,x\sqrt[3]{x^2}.$ 4. $\int\frac{ax^2\,dx}{\sqrt{x}}=\frac{2\,ax^2\sqrt{x}}{5}.$

5. $\int\left(ax^n+\frac{b}{x^m}+c\right)dx=\frac{ax^{n+1}}{n+1}-\frac{b}{(m-1)\,x^{m-1}}+cx.$

6. $\int x^2(mx^2+p)^2\,dx=\frac{m^2x^7}{7}+\frac{2\,mpx^5}{5}+\frac{p^2x^3}{3}.$

7. $\int\frac{4x^3-5x^2+7}{x^3\sqrt[3]{x^2}}\,dx=12\sqrt[3]{x}+\frac{15}{2\sqrt[3]{x^2}}-\frac{21}{8\,x^2\sqrt[3]{x^2}};$

8. $\int\frac{adx}{x^3\sqrt[5]{x}}=-\frac{3\,a}{7\,x^2\sqrt[5]{x}}.$ 9. $\int\frac{1}{\sqrt[4]{4\,x^3}}\,dx=2\sqrt{2}\sqrt[4]{x}.$

10. $\int\frac{3\,x^2+2}{\sqrt[5]{x^2}}\,dx=\left(\frac{9\,x^2}{7}+6\right)\sqrt[5]{x}.$

11. $\int\left(2\sqrt[3]{x}+\frac{6\,x}{\sqrt[3]{x}}-9\,x\right)^2dx=\frac{12\,x\sqrt[5]{x^2}}{5}-\frac{81\,x^2\sqrt[3]{x^2}}{2}+$

$27\,x^3+12\,x^2.$

III. — Intégration par substitution.

1. $y = \int \left(ax + b \right)^n dx.$

En posant $ax + b = z$, d'où $adx = dz$, il vient :

$$y = \int \frac{z^n\, dz}{a} = \frac{z^{n+1}}{a(n+1)} = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}.$$

2. $y = \int \frac{dx}{x+m}$; en posant $x + m = z$, d'où $dx = dz$, il vient :

$$y = \int \frac{dz}{z} = l.z = l(x+m).$$

3. $y = \int \left(ax^m + b\right)^n x^{m-1}\, dx$; en posant $ax^m + b = z$, d'où $max^{m-1}dx = dz$, il vient :

$$y = \int \frac{z^n\, dz}{ma} = \frac{z^{n+1}}{ma(n+1)} = \frac{(ax^m+b)^{n+1}}{ma(n+1)}.$$

4. $y = \int \frac{x^{m-1}\, dx}{ax^m + b} = \frac{1}{ma}\, l(ax^m + b).$

5. $y = \int \frac{3x}{5x^2 - 1}\, dx$; posant $5x^2 - 1 = z$, d'où $10xdx = dz$, on a :

$$y = \frac{3}{10} \int \frac{dz}{z} = \frac{3}{10}\, l(5x^2 - 1).$$

6. $y = \int \frac{xdx}{\sqrt{m^2 + x^2}}$; en posant $m^2 + x^2 = z^2$, d'où $xdx = 2\,dz$, on a :

$$y = \int dz = \sqrt{m^2 + x^2}\ .$$

7. $y = \int \frac{dx}{(x-a)^m}$; en posant $x - a = z$, d'où $dx = dz$, On a :

$$y = \int \frac{dz}{z^m} = -\frac{1}{(m-1)z^{m-1}} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}}.$$

8. $y = \int \sin x \cos x dx$; soit $\sin x = z$, d'où $\cos x dx = dz$, il vient :

$$y = \int z dz = \frac{z^2}{2} + c = \frac{\sin^2 x}{2} + c.$$

Remarque. — On peut encore trouver cette intégrale de la manière suivante :

$$y = \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + c'.$$

Il est facile de voir que ces deux résultats ne diffèrent que par la constante. On a en effet :

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x;$$

d'où

$$y = -\frac{1}{4}\cos 2x + c' = -\frac{1}{4} + \frac{\sin^2 x}{2} + c' = \frac{\sin^2 x}{2} + c,$$

résultat identique au précédent.

9. $y = \int tg\, x \, dx = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = \int \frac{-dz}{z}$, en posant $\cos x = z$, d'où $-\sin x \, dx = dz$.

$$y = -lz = l\frac{1}{z} = l.\frac{1}{\cos x}.$$

10. $y = \int \frac{dx}{\sqrt{m^2 - x^2}} = \int \frac{\frac{dx}{m}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{m^2}}}$. En posant $\frac{x}{m} = z$,

$$y = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \text{arc} \sin z = \text{arc} \sin \frac{x}{m}.$$

11. $y = \int \frac{dx}{a^2 + b^2 x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\frac{dx}{a}}{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2}}$; en posant $\frac{bx}{a} = z$,

d'où $b dx = a\, dz$, il vient :

$$y = \frac{1}{ab}\int\frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{ab}\,\text{arc}tg\,z = \frac{1}{ab}\,\text{arc}\ tg\,\frac{bx}{a}.$$

12. $y = \int e^{mx}\,dx$; posant $mx = z$, d'où $mdx = dz$, on a :

$$y = \frac{1}{m}\int e^z\,dz = \frac{1}{m}\,e^z = \frac{1}{m}\,e^{mx}.$$

13. $y = \int\frac{a\,x\,dx}{\sqrt{b^4 - x^4}} = \frac{a}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{b^4 - z^2}}$, en posant $x^2 = z$;

$$y = \frac{a}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{z}{b^2} = \frac{a}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{x^2}{b^2}.$$

14. $y = \int\sin(ax+b)\,dx$; en posant $ax + b = z$, il vient :

$$y = \frac{1}{a}\int\sin z\,dz = -\frac{1}{a}\cos z = -\frac{1}{a}\cos(ax+b).$$

15 $y = \int(l\,x)^m\,\frac{dx}{x}$; en posant $l.x = z$, on a :

$$y = \int z^m\,dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} = \frac{(l.x)^{m+1}}{m+1}.$$

16. $y = \int\frac{dx}{x^2 - 2x + 4} = \int\frac{dx}{(x-1)^2+3}$. En posant $x - 1 = z\sqrt{3}$, il vient :

$$y = \int\frac{dz\sqrt{3}}{3(1+z^2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc}\ tg\,z = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc}\ tg\,\frac{x-1}{\sqrt{3}}.$$

17. $y = \int\frac{e^x\,dx}{1+e^{2x}}$. En posant $e^x = z$, on a :

$$y = \int\frac{dz}{1+z^2} = \text{arc}\ tg\,z = \text{arc}\ tg\,e^x.$$

18. $y = \int e^{-ax}\,dx = -\frac{1}{a}\,e^{-ax}$, en posant $-ax = z$.

19. $y = \int\frac{dx}{1-e^{-x}} = \int\frac{e^x\,dx}{e^x - 1} = l.(e^x - 1).$

20. $y = \int \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1 - tg^2 x}}$. En posant $tg\, x = z$, il vient :

$$y = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} = \text{arc sin } z = \text{arc sin } (tg\, x).$$

21. $y = \int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)\, dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$; d'où :

$$y = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\cotg x - tg\, x = -\frac{1 + tg^2 x}{tg\, x}$$

$$y = -\frac{2}{\sin 2x}.$$

On peut encore intégrer cette expression de la manière suivante :

$$y = 4 \int \frac{\cos 2x\, dx}{\sin^2 2x}\text{; en posant } \sin 2x = z\text{, on a :}$$

$$y = 2 \int \frac{d\, z}{z^2} = -\frac{2}{z} = -\frac{2}{\sin 2x}.$$

22. $y = \int \frac{(x^2 - 2)\, dx}{(x^2 - 2x + 1)^2}$; en posant $x - 1 = z$, il vient :

$$y = \int \frac{(z^2 + 2z - 1)\, d\, z}{z^4} = \int \frac{dz}{z^2} + 2 \int \frac{dz}{z^3} - \int \frac{dz}{z^4};$$

$$y = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3\, z^3} = -\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{3\, (x - 1)^3};$$

$$y = \frac{1 - 3\, (x - 1) - 3\, (x - 1)^2}{3\, (x - 1)^3} = \frac{1 + 3x - 3x^2}{3\, (x - 1)^3}.$$

Autrement :

$$y = \int \frac{(x^2-2)dx}{(x^2-2x+1)^2} = \int \frac{(x^2-2)dx}{(x-1)^4} = \int \frac{(x^2-1)dx}{(x-1)^4} - \int \frac{dx}{(x-1)^4}$$

$$y = \int \frac{(x+1)dx}{(x-1)^3} - \int \frac{dx}{(x-1)^4} = \int \frac{(x-1)dx}{(x-1)^3} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^3} - \int \frac{dx}{(x-1)^4}$$

$$y = \int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2 \int \frac{dx}{(x-1)^3} - \int \frac{dx}{(x-1)^4}$$

$$y = -\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{3(x-1)^3}.$$

23. $y = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x}}$; posant $1 - x = t^2$, d'où $dx = 2t\,dt$, on a

$$y = \int \frac{(t^2-1)^3\,2t\,dt}{t} = 2\int \left(t^6 - 3t^4 + 3t^2 - 1\right)dt$$

$$y = \frac{2t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} + 2t^3 - 2t$$

$$y = 2\left[\frac{(1-x)^3\sqrt{1-x}}{7} - \frac{3(1-x)^2\sqrt{1-x}}{5} + (1-x)\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x}\right]$$

$$y = 2\sqrt{1-x}\left\{\frac{(1-x)^3}{7} - \frac{3(1-x)^2}{5} - x\right\}$$

$$y = -\frac{2\sqrt{1-x}}{35}\left\{5x^3 + 6x^2 + 8x + 16\right\}.$$

24. $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}}$. En posant $x^2 - a^2 = (b^2 - x^2)tg^2\varphi$,

on a :

$x^2(1 + tg^2\varphi) = b^2\,tg^2\varphi + a^2$; d'où $x^2 = b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi$

$$x\,dx = (b^2 - a^2)\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi.$$

Par suite,

$$y = \int \frac{(b^2-a^2)\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{tg\,\varphi\,(b^2-a^2)\cos^2\varphi} = \int d\varphi = \varphi.$$

Or, de la relation

$tg^2\varphi = \frac{x^2-a^2}{b^2-x^2}$, on tire $\sin^2\varphi = \frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}$;

d'où

$$y = \varphi = \text{arc}\,tg\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-x^2}} = \text{arc}\sin\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}.$$

25. $y = \int \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}dx = \int \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}dx.$

$$= \sin^2\alpha \int \frac{dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} - \frac{\cos\alpha}{2} \int \frac{2x - 2\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} dx$$

$$= \sin\alpha \operatorname{arc\,tg} \frac{x - \cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{1}{2} \cos\alpha \; l \left(1 - 2x\cos\alpha + x^2\right).$$

APPLICATIONS.

1. $y = \int \frac{dx}{x - m} = l\left(x - m\right).$

2. $y = \int \frac{3\,a\,x^2\,dx}{a\,x^3 - b} = l\left(a\,x^3 - b\right).$

3. $y = \int \frac{dx}{a\,x - b} = \frac{1}{a}\, l\left(a\,x - b\right).$

4. $y = \int \frac{(8\,x^3 - 3)\,dx}{2\,x^4 - 3\,x - 1} = l\left(2\,x^4 - 3\,x - 1\right).$

5. $y = \int \frac{2\,n\,x - 4\,p\,x^3}{m - n\,x^2 + p\,x^4}\,dx = l\,\frac{1}{m - n\,x^2 + p\,x^4}.$

6. $y = \int \operatorname{cotg} x\,dx = l \sin x.$

7. $y = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - b^2 x^2}} = \frac{1}{b} \arcsin \frac{b\,x}{a}.$

8. $y = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{b^2 - c\,x^2}} = \frac{a}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{x\sqrt{c}}{b}.$

9. $y = \int \frac{dx}{m^2 + x^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{m}.$

10. $y = \int \cos m\,x\,dx = \frac{1}{m} \sin mx.$

11. $y = \int \frac{dx}{x^2 + 2\,x + 3} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{x + 1}{\sqrt{2}}.$

12. $y = \int \frac{d\,x}{n\,x + a} = \frac{1}{n}\, l\left(n\,x + a\right).$

13. $y = \int \frac{3\,x^2\,dx}{a^3 + x^3} = l\left(a^3 + x^3\right).$

14. $y = \int \frac{3\,dx}{4 + 2\,x} = \frac{3}{2}\,l\left(4 + 2\,x\right).$

15. $y = \int \frac{3\,b + 6\,c\,x}{5(a^2 + b\,x + c\,x^2)}\,d\,x = \frac{3}{5}\,l\left(a^2 + b\,x + c\,x^2\right).$

16. $y = \int \frac{3\,x\,dx}{(2 + 3\,x^2)^3} = -\frac{1}{4\,(2 + 3\,x^2)^2}.$

17. $y = \int \frac{\cos x\,dx}{1 + \sin^2 x} = \text{arc tg}\left(\sin x\right).$

18. $y = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos^m x} = \frac{1}{(m - 1)\cos^{m-1} x}.$

19. $y = \int \frac{dx}{x\,l\,x} = l\,l\,x.$

20. $y = \int \left(a + b\,x\right)\,d\,x = \frac{(a + b\,x)^2}{2\,b}.$

21. $y = \int \frac{(a + bx^2 + cx^3)\,(3cx^2 + 2bx)}{4}\,dx = \frac{(a + bx^2 + cx^3)^2}{8}.$

22. $y = \int \frac{(2\,x + 1)\,dx}{\sqrt{x^2 + x}} = 2\sqrt{x^2 + x}.$

23. $y = \int \frac{2\,x\,dx}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{1}{x^2 + 1}.$

24. $y = \int \frac{(\sqrt{x^2 + 4} + x)\,dx}{\sqrt{x^2 + 4}} = x + \sqrt{x^2 + 4}.$

25. $y = \int \frac{dx}{x^2 + ax + a^2} = \frac{2}{a\sqrt{3}}\,\text{arc tg}\,\frac{2\,x + a}{a\sqrt{3}}.$

26. $y = \int \frac{5x\,dx}{2+3x} = \frac{5}{3}\int \frac{3x+2-2}{2+3x}\,dx = \frac{5}{3}\,x - \frac{10}{9}\,l\left(2 + 3\,x\right).$

27 $y = \int \frac{3 + 10\,x}{(4 + 3\,x + 5\,x^2)^2}\,dx = -\frac{1}{4 + 3\,x + 5\,x^2}.$

28. $y = \int \frac{x^5\,dx}{(x+3)^2} = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{27x^2}{2} - 108x + 405\,l\left(x+3\right) + \frac{243}{x+3}.$

29. $y = \int \frac{dx}{1+3x^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ arc tg } x\sqrt{3}.$

30. $y = \int \frac{x^3\,dx}{(x+2)^3} = \frac{(x+2)^3 - 12(x+2)^2 + (x+2)l(x+2)^{24} + 16}{2\,(x+2)}.$

31. $y = \int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{1+x} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2\,x^{\frac{1}{2}} - 2 \text{ arc tg } \sqrt{x}.$

32. $y = \int \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ arc tg } \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

IV. — Intégration par parties.

1. $y = \int l\,x.\,d\,x.$ En posant $l\,x = u$, $d\,x = d\,v$, dans la formule générale, on trouve :

$$y = \int l\,x.\,dx = x\,l\,x - \int dx = x\,l\,x - x = x\left(lx - 1\right).$$

2. $y = \int x^m\,l\,x\,dx.$ En posant $l\,x = u$, $x^m\,dx = dv$, on a :

$$y = \int l\,x.\,x^m\,d\,x = \frac{x^{m+1}.\,l\,x}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int x^m\,dx$$

$$= \frac{x^{m+1}\,l\,x}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left[l\,x - \frac{1}{m+1}\right].$$

3. $y = \int x\,e^x\,dx$; en posant $x = u$, $e^x\,dx = dv$, il vient :

$$y = \int x\,e^x\,d\,x = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x = e^x\left(x-1\right).$$

Remarque. – Cet exercice nous conduit à une remarque très importante que nous recommandons aux élèves. Le choix des quantités que l'on égale à u et à $d\,v$ n'est pas complètement arbitraire. Ainsi, si dans le n° 3 nous posions :

$$x\,dx = dv, \qquad e^x = u, \quad \text{il viendrait :}$$

$$\int x e^x dx = \frac{e^x . x^2}{2} - \frac{1}{2} \int e^x . x^2 dx ,$$

et l'on voit que la seconde intégrale est plus compliquée que la première.

4. $y = \int \arc \sin x \, d x = x \arc \sin x - \int \frac{x \, d x}{\sqrt{1 - x^2}}$

$= x \arc \sin x + \sqrt{1 - x^2}$, en posant $\arc \sin x = u$.

5. $y = \int x^2 \sin x \, dx$. En posant $x^2 = u, \sin x \, dx = dv$, on a :

$y = - x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx$. Or, on a, en posant de nouveau $x = u$, $\cos x \, dx = d v$,

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x .$$

Par suite,

$$y = \int x^2 \sin x \, dx = - x^2 \cos x + 2 x \sin x + 2 \cos x .$$

Remarque. — Il faut faire attention, quand on applique plusieurs fois de suite l'intégration par parties, de ne pas revenir sur ses pas. Ainsi, par exemple, pour intégrer l'expression $\int x \cos x \, d x$, il faut prendre garde de poser $\cos x = u$, $x \, d x = d v$, ce qui nous donnerait :

$$\int x \cos x \, d x = \frac{x^2}{2} \cos x + \frac{1}{2} \int x^2 \sin x \, dx ,$$

et, en remplaçant, nous serions conduits à une identité.

6. $y = \int e^x \sin x dx = - e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$, en posant $e^x = u$;

$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, d x$, en posant aussi $e^x = u$;

donc,

$$y = \int e^x \sin x \, dx = - e^x \cos x + e^x \sin x - \int e_x \sin x \, dx .$$

D'où :

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x\right).$$

Ici le choix de u et de dv est arbitraire. Ainsi, en posant $u = \sin x$, $dv = e^x\, dx$, on a :

$$y = \int e^x \sin x\, dx = \sin x.\, e^x - \int e^x \cos x\, dx,$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \cos x.\, e^x + \int e^x \sin x\, dx;$$

$$y = \int e^x \sin x\, dx = \sin x.\, e^x - \cos x.\, e^x - \int e^x \sin x\, dx,$$

d'où $y = \frac{1}{2} e^x \left(\sin x - \cos x\right)$, comme ci-dessus.

7. $y = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x}} = -2x\sqrt{1-x} + 2\int dx\sqrt{1-x}$,

en posant $u = x$; $\quad y = -2x\sqrt{1-x} + 2\int \frac{(1-x)\, dx}{\sqrt{1-x}}$

$$= -2x\sqrt{1-x} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - 2\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1-x}}.$$

Donc,

$3y = -2x\sqrt{1-x} - 4\sqrt{1-x}$; $\quad y = -\frac{2x\sqrt{1-x}}{3} - \frac{4\sqrt{1-x}}{3}$

ou bien $\quad y = -\frac{2\sqrt{1-x}}{3}\left(x+2\right)$.

On peut encore intégrer cette expression par substitution, en posant $1 - x = z^2$.

8. $y = \int \left(1 + 3x^2\right) \text{arc tg}\, x\, dx$; en posant $\text{arc tg}\, x = u$,

$\left(1 + 3x^2\right) dx = dv$, on a :

$$y = (x+x^3)\operatorname{arctg} x - \int \frac{(x+x^3)dx}{1+x^2} = (x+x^3)\operatorname{arctg} x - \int x dx$$

$$= (x+x^3)\operatorname{arc\,tg} x - \frac{x^2}{2}.$$

9 $y = \int e^{-ax} \cos x \, dx = e^{-ax} \sin x + a \int e^{-ax} \sin x \, dx$,

$$\int e^{-ax} \sin x \, dx = - e^{-ax} \cos x - a \int e^{-ax} \cos x \, dx ;$$

d'où :

$$y = \int e^{-ax} \cos x dx = e^{-ax} \sin x - a e^{-ax} \cos x - a^2 \int e^{-ax} \cos x dx;$$

enfin, $y = \dfrac{e^{-ax}(\sin x - a \cos x)}{1+a^2}$.

Ici encore le choix de u et de dv est arbitraire; en posant $e^{-ax} d x = d v$, $\cos x = u$, on a :

$$y = \int e^{-ax} \cos x \, dx = - \frac{1}{a} e^{-ax} \cos x - \frac{1}{a} \int e^{-ax} \sin x \, dx$$

$$\int e^{-ax} \sin x \, d x = - \frac{1}{a} e^{-ax} \sin x + \frac{1}{a} \int e^{-ax} \cos x dx,$$

$$y = - \frac{1}{a} e^{-ax} \cos x + \frac{1}{a^2} e^{-ax} \sin x - \frac{1}{a^2} \int e^{-ax} \cos x dx ;$$

enfin,

$$y = \frac{e^{-ax}(\sin x - a \cos x)}{1+a^2}, \text{ comme ci-dessus.}$$

10. $y = \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = - \frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx .$$

Par conséquent,

$$y = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} y ,$$

$$y = \frac{e^{ax}(a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2}.$$

11. $y = \int e^{ax} \sin bx \, dx = \dfrac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}.$

12. $y = \int \operatorname{arc\,tg} x \, dx = x \operatorname{arc\,tg} x - \int \dfrac{x\, dx}{1 + x^2}.$

$$= x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} l \left(1 + x^2\right) = x \operatorname{arc\,tg} x - l \sqrt{1 + x^2}.$$

13. $y = \int \left(lx\right)^2 dx = \left(l x\right)^2 x - 2\int \left(lx\right) dx$

$$= x \left(l x\right)^2 - 2 x l x + 2 x = x\left[\left(l x\right)^2 - 2 l x + 2\right].$$

14. $y = \int \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = -\sqrt{1 - x^2}. \arcsin x + \int dx$

$$= -\sqrt{1 - x^2}. \arcsin x + x.$$

15. $y = \int x a^x dx = \dfrac{x a^x}{l a} - \dfrac{1}{l a} \int a^x dx$

$$= \frac{x a^x}{l a} - \frac{a^x}{(l a)^2} = \frac{a^x}{(l a)^2} \left\{ x l a - 1 \right\}.$$

16. $y = \int x \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \dfrac{x^2}{2} \operatorname{arc\,tg} x - \dfrac{1}{2} \int \dfrac{x^2 dx}{1 + x^2}$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \int \frac{(1 + x^2 - 1)\, dx}{1 + x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2} \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 + 1\right) \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} x.$$

17. $y = \int \dfrac{x^2}{1 + x^2} \operatorname{arc\,tg} x \, dx = \int \dfrac{(1 + x^2 - 1) \operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^2} dx$

$$= \int \operatorname{arc\,tg} x \, dx - \int \operatorname{arc\,tg} x \frac{dx}{1 + x^2}.$$

Or,

$$\int \operatorname{arc\,tg} x . \frac{dx}{1+x^2} = \int \operatorname{arc\,tg} x \, d . \operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arc\,tg} x\right)^2 ;$$

donc,

$$y = x \operatorname{arc\,tg} x - l\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} x\right)^2$$

$$= \left(x - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x\right) \operatorname{arc\,tg} x - l\sqrt{1+x^2} .$$

18. $y = \int \operatorname{tg}^2 x \, dx$. En posant $\operatorname{tg} x = z$, il vient :

$$y = \int \frac{z^2 \, dz}{1+z^2} = \int \frac{z^2+1-1}{1+z^2} \, dz = \int dz - \int \frac{dz}{1+z^2}$$

$$= z - \operatorname{arc\,tg} z = \operatorname{tg} x - x .$$

Autrement. Il est facile de voir que l'on a :

$$y = \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x .$$

Remarque. — L'intégrale du n° 17 peut être obtenue en posant $\operatorname{arc\,tg} x = z$, d'où $x = \operatorname{tg} z$; par suite,

$$y = \int \operatorname{tg}^2 z . z \, dz = \int \frac{(1-\cos^2 z) \, z \, dz}{\cos^2 z} = \int \frac{z \, dz}{\cos^2 z} - \int z \, dz ;$$

or,

$$\int \frac{z \, dz}{\cos^2 z} = z \operatorname{tg} z - \int \operatorname{tg} z \, dz = z \operatorname{tg} z + l \cos z .$$

Par conséquent,

$$y = z \operatorname{tg} z + l \cos z - \frac{z^2}{2} = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc\,tg} x\right)^2$$

$$+ l \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} ,$$

ou bien, comme ci-dessus,

$$y = x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\left(\operatorname{arc tg} x\right) - l\sqrt{1+x^2} .$$

19. $y = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x . \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

$= -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int dx \sqrt{a^2 - x^2}\,;$

or,

$$\int dx \sqrt{a^2 - x^2} = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Donc,

$$y = -x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} - y\,;$$

d'où :

$$y = -\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a}.$$

Applications.

1. $y = \int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x.$

2. $y = \int x^3 e^x\,dx = e^x\left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right).$

3. $y = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1 - x}} = -\frac{2\sqrt{1 - x}}{35}\left\{5x^3 + 6x^2 + 8x + 16\right\}.$

4. $y = \int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2}.$

5. $y = \int e^{-2x}\,dx = -\frac{e^{-2x}}{2}.$

6. $y = \int x e^{2x}\,dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}.$

7. $y = \int x e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x}.$

8. $y = \int e^{-x} \sin x\,dx = -e^{-x} \frac{\sin x + \cos x}{2}.$

9. $y = \int e^{-x} \cos x \, dx = e^{-x} \dfrac{\sin x - \cos x}{2}$.

10. $y = \int x e^{x} \sin x \, dx = \dfrac{x e^{x} (\sin x - \cos x)}{2} + \dfrac{e^{x} \cos x}{2}$.

11. $y = \int x e^{x} \cos x \, dx = \dfrac{x e^{x} (\sin x + \cos x)}{2} - \dfrac{e^{x} \sin x}{2}$.

12. $y = \int x e^{-x} \sin x \, dx = -\dfrac{x e^{-x} (\sin x + \cos x)}{2} - \dfrac{e^{-x} \cos x}{2}$.

13. $y = \int x e^{-x} \cos x \, dx = \dfrac{x e^{-x} (\sin x - \cos x)}{2} + \dfrac{e^{-x} \sin x}{2}$.

14. $y = \int x \sqrt{a + x} \, dx = \dfrac{2}{5} \left(a + x\right)^{\frac{5}{2}} - \dfrac{2a}{3} \left(a + x\right)^{\frac{3}{2}}$.

15. $y = \int \sqrt{a^2 + x^2} \, dx = \dfrac{x \sqrt{a^2 + x^2}}{2} + \dfrac{a^2}{2} l \left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$.

V. — Intégration des fractions rationnelles.

1. $y = \int \dfrac{x \, dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2} l \left(x^2 - a^2\right) = l \sqrt{x^2 - a^2}$.

2. $y = \int \dfrac{dx}{x^2 - a^2}$.

En posant $\dfrac{1}{x^2 - a^2} = \dfrac{A}{x - a} + \dfrac{B}{x + a}$, il vient :

$$1 = A\left(x + a\right) + B\left(x - a\right);$$

d'où : $A + B = 0$, $A - B = \dfrac{1}{a}$; et, par suite,

$$A = \frac{1}{2a}, \qquad B = -\frac{1}{2a}.$$

$$y = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x - a} - \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{x + a}$$

$$= \frac{1}{2a} l \left(x - a\right) - \frac{1}{2a} l \left(x + a\right) = \frac{1}{a} l \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}.$$

3. $y = \int \frac{(2x^2 - 3x - 1)\,dx}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$.

On trouve facilement $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(x+1)(x-2)$, et, en posant,

$$\frac{2x^2 - 3x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2},$$ il vient :

$$2x^2 - 3x - 1 = A(x+1)(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-1)(x+1)$$

$$= A(x^2 - x - 2) + B(x^2 - 3x + 2) + C(x^2 - 1).$$

On tire de là :

$$A + B + C = 2, \quad -A - 3B = -3, \quad -2A + 2B - C = -1.$$

Par suite,

$$A = 1, \qquad B = \frac{2}{3}, \qquad C = \frac{1}{3}.$$

$$y = \int \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-2}.$$

$$= l\left(x - 1\right) + \frac{2}{3} l\left(x + 1\right) + \frac{1}{3} l\left(x - 2\right) + \text{const}$$

$$= l\left(x - 1\right)\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2\left(x-2\right)} + la = l.\, a\left(x-1\right)\sqrt[3]{\left(x+1\right)^2\left(x-2\right)}.$$

4. $y = \int \frac{ax - b}{x^2 - c^2}\,dx = a\int \frac{x\,dx}{x^2 - c^2} - b\int \frac{dx}{x^2 - c^2}$

$$= \frac{a}{2} l\left(x^2 - c^2\right) - \frac{b}{c} l \sqrt{\frac{x-c}{x+c}}.$$

5. $y = \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$.

$$\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{A}{a+x} + \frac{B}{a-x}.$$

$$1 = A\left(a - x\right) + B\left(a + x\right).$$

En faisant $x = a$, on a $B = \frac{1}{2a}$; et, pour $x = -a$, il vient : $A = \frac{1}{2a}$.

$$y = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{a+x} + \int \frac{dx}{a-x}\right] = \frac{1}{a}\, l \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

6. $y = \int \frac{(x^2 + x - 1)\, dx}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

A cause de $x^3 - x^2 - x + 1 = \left(x-1\right)^2\left(x+1\right)$, on pose :

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 - x - 1} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}, \text{ et il vient :}$$

$$x^2 + x - 1 = A\left(x+1\right) + B\left(x-1\right)\left(x+1\right) + C\left(x-1\right)^2. \quad (1)$$

Comme le dénominateur a une racine double, nous devons prendre la dérivée première de l'équation précédente, et nous aurons :

$$2x + 1 = A + B\left(x+1\right) + B\left(x-1\right) + 2C\left(x-1\right). \quad (2)$$

En faisant $x = 1$ dans l'équation (1), on trouve :

$$A = \frac{1}{2};$$

pour $x = -1$, cette même équation (1) donne : $C = -\frac{1}{4}$;

et, en faisant $x = 1$ dans (2), il vient : $B = \frac{5}{4}$.

$$y = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{5}{4}\int \frac{dx}{x-1}.$$

$$= -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{4}\, l\left(x+1\right) + \frac{5}{4}\, l\left(x-1\right)$$

$$= -\frac{1}{2(x-1)} + l\sqrt[4]{\frac{(x-1)^5}{x+1}}.$$

7. $y = \int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \int \frac{(x^2+1-1)\,dx}{1+x^2} = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}$

$$= x - \operatorname{arc\,tg} x.$$

8. $y = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(1+x^2-x^2)dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{(1+x^2)} - \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$

$$= \operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}.$$

Or,

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{x}{2} \cdot \frac{2\,x\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2},$$

car,

$$\int \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = \int \left(1+x^2\right)^{-2} \cdot 2\,x\,dx = -\left(1+x^2\right)^{-1};$$

par conséquent,

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x,$$

et

$$y = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x + \frac{x}{2(1+x^2)}.$$

9. $y = \int \frac{(x+1)\,dx}{x^2+1} = \int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}$

$$= \frac{1}{2}\, l\left(x^2+1\right) + \operatorname{arc\,tg} x.$$

10. $y = \int \frac{(x+1)\,dx}{(x-1)^2}.$

on a :

$$\frac{x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1},$$

$$x+1 = A + B\left(x-1\right);$$

d'où

$$A - B = 1, \quad B = 1; \quad \text{donc,} \quad A = 2, \quad B = 1;$$

$$y = \int \frac{(x+1)dx}{(x-1)^2} = 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-1} = -\frac{2}{x-1} + l\left(x-1\right).$$

11. $y = \int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

On pose

$$\frac{1}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+1},$$

$$1 = A\left(x+1\right)^2 + B\left(x-1\right)\left(x+1\right)^2 + C\left(x-1\right)^2 + D\left(x+1\right)\left(x-1\right)^2.$$

En faisant $x = 1$, on obtient $A = \frac{1}{4}$; pour $x = -1$, il vient $C = \frac{1}{4}$.

La dérivée première est

$$0 = 2A\left(x+1\right) + B\left(x+1\right)^2 + 2B\left(x-1\right)\left(x+1\right) + 2C\left(x-1\right)$$
$$+ 2D\left(x+1\right)\left(x-1\right) + D\left(x-1\right)^2.$$

En faisant $x = 1$, on a $4A + 4B = 0$; donc $B = -A$, d'où $B = -\frac{1}{4}$: de même, $x = -1$ nous donne $D = \frac{1}{4}$.

Par conséquent,

$$y = \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left[\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{(x+1)^2} + \int \frac{dx}{x+1}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{x-1} - l\left(x-1\right) - \frac{1}{x+1} + l\left(x+1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\, l\, \frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{2\,(x^2-1)}\,.$$

12. $y = \int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^3 - 3\,x^2 + 4\,x - 2}\,.$

A cause de la relation $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = \left(x-1\right)\left(x^2-2x+2\right)$, on pose :

$$\frac{x^2+1}{x^3-3x^2+4x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B\,x + C}{x^2 - 2\,x + 2},$$ et il vient :

$$x^2 + 1 = A\,\left(x^2 - 2\,x + 2\right) + \left(B\,x + C\right)\left(x - 1\right).$$

On a donc :

$$A + B = 1, \quad -2\,A - B + C = 0, \quad 2\,A - C = 1\,;$$

d'où

$$A = 2, \quad B = -1, \quad C = 3.$$

Par conséquent,

$$y = 2\int\frac{dx}{x-1} + \int\frac{(3-x)\,dx}{x^2 - 2\,x + 2}$$

$$= 2\,l\left(x-1\right) + \int\frac{(1-x)\,dx}{x^2-2\,x+2} + 2\int\frac{dx}{x^2-2\,x+2}$$

$$= 2\,l\left(x-1\right) - \frac{1}{2}\,l\left(x^2 - 2\,x + 2\right) + 2\,\text{arc tg}\left(x-1\right)$$

$$= l\,\frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2\,x+2}} + 2\,\text{arc tg}\left(x-1\right).$$

13 $y = \int\frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2} = \int\frac{x\,dx}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^2}\,.$

En posant $x + \frac{1}{2} = \frac{z\sqrt{3}}{2}$, on obtient :

$$y = \int \frac{\left(\frac{z\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{dz\sqrt{3}}{2}}{\frac{9}{16}\left(z^2+1\right)^2} = \frac{4}{3\sqrt{3}}\int \frac{(z\sqrt{3}-1)\,dz}{(1+z^2)^2}$$

$$= \frac{4}{3}\int \frac{z\,dz}{(1+z^2)^2} - \frac{4}{3\sqrt{3}}\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$$

$$= -\frac{4}{6(1+z^2)} - \frac{4}{6\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg} z - \frac{4z}{6\sqrt{3}(1+z^2)}.$$

$$= -\frac{2}{3(1+z^2)} - \frac{2z}{3\sqrt{3}(1+z^2)} - \frac{2\operatorname{arc\,tg} z}{3\sqrt{3}}.$$

Or, $z = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, et, en remplaçant, il vient, après quelques réductions :

$$y = -\frac{1}{2(x^2+x+1)} - \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$= -\frac{x+2}{3(x^2+x+1)} - \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

14. $y = \int \frac{dx}{x^4 - 7x^2 + 12} = \int \frac{dx}{(x^2-4)(x^2-3)}.$

On posera donc :

$$\frac{1}{x^4 - 7x^2 + 12} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+\sqrt{3}} + \frac{D}{x-\sqrt{3}};$$

d'où

$$1 = A(x-2)(x^2-3) + B(x+2)(x^2-3) + C(x^2-4)(x-\sqrt{3}) + D(x^2-4)(x+\sqrt{3}).$$

Pour $x = 2$, on a $B = \frac{1}{4}$,

pour $x = -2$, $A = -\frac{1}{4}$,

pour $x = \sqrt{3}$, $D = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$,

pour $x = -\sqrt{3}$, $\qquad C = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$,

d'où :

$$y = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+2}+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{dx}{x+\sqrt{3}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\int\frac{dx}{x-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{4}\,l\,\frac{x-2}{x+2}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\,l\,\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}.$$

15. $y = \int\frac{x^2\,dx}{(x+a)^2\,(x^2+a^2)}$.

Posons :

$$\frac{x^2}{(x+a)^2\,(x^2+a^2)} = \frac{A}{(x+a)^2}+\frac{B}{x+a}+\frac{Mx+N}{x^2+a^2};$$

d'où :

$$x^2 = A\,(x^2+a^2) + B\,(x+a)\,(x^2+a^2) + (Mx+N)\,(x+a)^2. \quad (1)$$

Pour $x = -a$, on a $A = \frac{1}{2}$;

pour $x = a\sqrt{-1}$, il vient :

$$-1 = -2\,Ma + 2\,N\sqrt{-1},$$

d'où l'on tire :

$2\,Ma = 1$, $N = 0$; ou bien $M = \frac{1}{2a}$, $N = 0$.

Pour obtenir B, prenons la dérivée de (1) par rapport à x, et nous aurons :

$$2\,x = 2\,A\,x + B\,(x^2+a^2) + \text{ etc.} \quad (2)$$

Faisons $x = -a$ dans cette dernière équation, il vient :

$$B = -\frac{1}{2a}.$$

Par suite,

$$y = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x+a)^2}-\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a}+\frac{1}{2a}\int\frac{x\,dx}{x^2+a^2},$$

ou bien :

$$y = -\frac{1}{2(x+a)} - \frac{1}{2a} l\left(x+a\right) + \frac{1}{4a} l\left(x^2+a^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2(x+a)} + \frac{1}{4a} l \frac{(x+a)^2}{x^2+a^2}.$$

Remarque. — Nous n'avons écrit que deux termes du second membre de l'équation (2). La valeur de B n'en sera pas altérée : en effet, comme on peut s'en assurer à l'inspection de (1), tous les termes que nous avons supprimés dans (2) sont nuls pour $x = -a$. Or, comme, en prenant la dérivée de (1), on sait que l'on devra y faire ensuite $x = -a$, il est évident que l'on peut, en écrivant cette dérivée, se dispenser d'écrire tous les termes qui renfermeront le facteur $(x+a)$, puisque ces termes se réduiront à zéro pour $x = -a$.

16. $$y = \int \frac{(x^2+1)\,dx}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{(x^2+x+1-x)\,dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \int \frac{dx}{x^2+x+1} - \int \frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)}.$$

17. $$y = \int \frac{dx}{(x-1)(x^2+1)^2}.$$

Si l'on pose

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{(x^2+1)^2} + \frac{Px+Q}{x^2+1},$$

on obtient :

$$1 = A(x^2+1)^2 + (Mx+N)(x-1) + (Px+Q)(x-1)(x^2+1); \quad (1)$$

en prenant la dérivée, et ayant égard à la remarque du n° 15, il vient :

$$0 = M(x-1) + (Mx+N) + 2x(Px+Q)(x-1) + \text{etc.} \quad (2)$$

L'équation (1) donne, pour $x = 1$, $A = \frac{1}{4}$; et pour $x = \sqrt{-1}$, on a :

$$1 = -M + N\sqrt{-1} - M\sqrt{-1} - N,$$

d'où :

$$1 = -M - N,$$
$$0 = N - M.$$

Par conséquent, $M = -\frac{1}{2}$, $N = -\frac{1}{2}$.

En faisant $x = \sqrt{-1}$ dans (2), on trouve les deux équations suivantes :

$$Q - P = 0, \qquad P + Q = -\frac{1}{2};$$

par conséquent $P = -\frac{1}{4}$, $Q = -\frac{1}{4}$.

On a alors

$$y = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{(x+1)\,dx}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{4}\int\frac{(x+1)\,dx}{x^2+1}$$
$$= \frac{1}{4}\,l\left(x-1\right) + \frac{1}{4(x^2+1)} - \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{4(1+x^2)}$$
$$-\frac{1}{8}\,l\left(x^2+1\right) \quad \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x,$$

ou bien

$$y = \frac{1}{8}\,l\,\frac{(x-1)^2}{x^2+1} - \frac{x-1}{4(x^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$$

18. $y = \int\frac{x^3 - 2x + 1}{x^3(x-2)(x^2+1)^2}\,dx$.

Posons :

$$\frac{x^3-2x+1}{x^3(x-2)(x^2+1)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x-2} + \frac{Mx+N}{(x^2+1)^2} + \frac{Px+Q}{x^2+1}.$$

On en déduit :

$$x^3 - 2x + 1 = A(x-2)(x^2+1)^2 + Bx(x-2)(x^2+1)^2 + Cx^2(x-2)(x^2+1)^2 + Dx^3(x^2+1)^2 + (Mx+N)x^3(x-2) + (Px+Q)x^3(x-2)(x^2+1) . \quad (1)$$

Comme nous avons une racine triple, nous devons prendre deux dérivées successives, et nous aurons, en appliquant avec précaution la remarque du n° 15 :

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2-2 = A(x+1)^2 + 4Ax(x-2)(x^2+1) + B(x-2)(x^2+1)^2 \\ \quad + Bx(x^2+1)^2 + 2Cx(x-2)(x^2+1)^2 + \text{ etc.} \\ \quad + Mx^3(x-2) + 3(Mx+N)x^2(x-2) + (Mx+N)x^3 \\ \quad + 2x^4(Px+Q)(x-2) + \text{ etc.} \end{array}\right\} (2)$$

$$6x = 4A(x-2)(x^2+1) + 2B(x^2+1)^2 + 2C(x-1)(x^2+1)^2 + \text{etc.} \; (3)$$

Remarquons ici que dans l'équation (2) nous avons écrit des termes renfermant le facteur x, lesquels sont nuls pour $x = 0$; mais, en prenant la dérivée suivante, ces termes en donnent d'autres qui ne contiennent plus le facteur x: il était donc nécessaire d'écrire ceux que nous avons conservés. D'un autre côté, nous avons des termes en x^2, x^3 et en x^4 ; ces termes s'annulent pour $x=0$; mais pour $x=\sqrt{-1}$, ils ne sont pas nuls, puisqu'ils ne renferment pas le facteur x^2+1. En résumé, les termes que nous ne devions pas écrire dans (2) étaient ceux qui renfermaient à la fois les facteurs x^3 et (x^2+1). Dans (2) il ne faut écrire que les termes ne contenant pas le facteur x à une puissance quelconque. Cela posé, en faisant $x = 0$, nous aurons :

Dans l'équation (1) $\quad B = -\frac{1}{2}$;

Dans l'équation (2) $\quad -2 = A - 2B$, d'où $B = \frac{3}{4}$;

Dans l'équation (3) $\quad 0 = -8A + 2B - 4C$, d'où $C = \frac{11}{8}$.

L'équation (1) donne aussi, pour $x = 2$, $D = \frac{1}{40}$.

Enfin, en faisant $x = \sqrt{-1}$ dans (1), on trouve :

$$M = -1, \qquad N = -1.$$

La même substitution $x = \sqrt{-1}$ faite dans (2) nous donne :

$$P = -\frac{7}{5}, \qquad Q = -\frac{4}{5}.$$

Nous aurons donc :

$$y = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^2} + \frac{11}{8}\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{40}\int\frac{dx}{x-2} - \int\frac{(x+1)dx}{(x^2+1)^2}$$
$$-\frac{1}{5}\int\frac{(7x+4)dx}{x^2+1};$$

d'où :

$$y = \frac{1}{4x^2} - \frac{3}{4x} + \frac{11}{8}\,l\,x + \frac{1}{40}\,l\left(x-2\right) - \frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2}\text{arctg}x$$
$$-\frac{7}{10}\,l\left(x^2+1\right) - \frac{4}{5}\text{ arc tg } x; \text{ ou bien :}$$

$$y = \frac{1-3x}{4x^2} + \frac{11}{8}\,l\,x + \frac{1}{40}\,l\left(x-2\right) - \frac{7}{10}\,l\left(x^2+1\right)$$
$$-\frac{x-1}{2(x^2+1)} - \frac{13}{10}\text{ arc tg } x.$$

19. $y = \int\frac{(3-2x)\,dx}{x^2-x-2} = \int\frac{(1-2x)\,dx}{x^2-x-2} + 2\int\frac{dx}{x^2-x-2}$

$$= -\,l\left(x^2-x-2\right) + \frac{4}{3}\text{ arc tg }\frac{2x-1}{3}.$$

20. $y = \int\frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6}\,dx.$

Si l'on pose $x - 1 = z$, d'où $x = z + 1$, $x^2 = z^2 + 2z + 2$, il vient :

$$y = \int\frac{(z^4+4z^2+4+4z^3+4z^2+8z)\,dz}{z^6}, \text{ ou bien :}$$

$$y = \int\frac{dz}{z^2} + 4\int\frac{dz}{z^3} + 8\int\frac{dz}{z^4} + 8\int\frac{dz}{z^5} + 4\int\frac{dz}{z^6}$$

$$y = -\frac{1}{z} - \frac{4}{2z^2} - \frac{8}{3z^3} - \frac{8}{4z^4} - \frac{4}{5z^5}$$

$$= -\frac{1}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{8}{3(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^4} - \frac{4}{5(x-1)^5}.$$

Après quelques réductions, on trouve :

$$y = \frac{-15x^4 - 30x^3 - 40x^2 + 20x - 7}{15(x-1)^5}.$$

21. Si l'on applique à cette intégrale $y = \int \frac{(x^2+1)^2}{(x-1)^6} dx$, la méthode des racines égales, on a successivement :

$$f(x) = x^4 + 2x^2 + 1, \quad f(1) = 4 = A,$$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x, \quad \frac{f'(1)}{1} = 8 = B,$$

$$f''(x) = 12x^2 + 4, \quad \frac{f''(1)}{1.2} = 8 = C,$$

$$f'''(x) = 24x, \quad \frac{f'''(1)}{1.2.3} = 4 = D,$$

$$f^{IV}(x) = 24, \quad \frac{f^{IV}(1)}{1.2.3.4} = 1 = E,$$

$$f^{V}(x) = 0, \quad \frac{f^{V}(1)}{1.2.3.4.5} = 0 = F.$$

Il vient alors :

$$y = 4\int \frac{dx}{(x-1)^6} + 8\int \frac{dx}{(x-1)^5} + 8\int \frac{dx}{(x-1)^4} + 4\int \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$+ \int \frac{dx}{(x-1)^2};$$

d'où :

$$y = -\frac{4}{5(x-1)^5} - \frac{2}{(x-1)^4} - \frac{8}{3(x-1)^3} - \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1},$$

comme ci-dessus.

22. $y = \int \frac{x^2\,dx}{x^3+1}$.

Posons :

$$\frac{x^2}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}; \quad \text{nous aurons :}$$

$$x^2 = A(x^2 - x + 1) + (Mx + N)(x + 1);$$

d'où :

$$A + M = 1, \quad -A + M + N = 0, \quad A + N = 0;$$

par conséquent,

$$A = \frac{1}{3}, \quad N = -\frac{1}{3}, \quad M = \frac{2}{3}.$$

On a donc :

$$y = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\,l\left(x+1\right) + \frac{1}{3}\,l\left(x^2-x+1\right)$$

$$= l\,\sqrt[3]{\left(x+1\right)\left(x^2-x+1\right)} = l\,\sqrt[3]{x^3+1},$$

ce qui était évident, puisque le numérateur est, au facteur 3 près, la différentielle du dénominateur. On a donc :

$$\int \frac{x^2dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\,l\left(x^3+1\right) = l\,\sqrt[3]{x^3+1}.$$

23. $y = \int \frac{dx}{x^4+1}$.

On a :

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{1}{(x^2+1)^2 - 2x^2} = \frac{1}{(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)}.$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Mx+N}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Px+Q}{x^2-x\sqrt{2}+1},$$

et

$$1=(Mx+N)(x^2-x\sqrt{2}+1)+(Px+Q)(x^2+x\sqrt{2}+1). \qquad (1)$$

On trouve facilement :

$$M=\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad N=\frac{1}{2},\quad P=-\frac{1}{2\sqrt{2}},\quad Q=\frac{1}{2}.$$

On peut y arriver de la manière suivante :

Faisons d'abord $x^2=-1$ dans (1), il viendra :

$$1=-(Mx+N)\,x\sqrt{2}+(Px+Q)\,x\sqrt{2},$$

ou bien :

$$1=-Mx^2\sqrt{2}-Nx\sqrt{2}+Px^2\sqrt{2}+Qx\sqrt{2},$$

et, comme on fait $x^2=-1$, ou bien $x=\sqrt{-1}$, on a :

$$1=M\sqrt{2}-N\sqrt{2}\sqrt{-1}-P\sqrt{2}+Q\sqrt{2}\sqrt{-1};$$

d'où :

$$M-P=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad Q-N=0. \qquad (2)$$

Pour $x=0$, la formule (1) donne :

$$1=N+Q, \qquad (3)$$

et pour $x=\infty$, elle donne, après avoir divisé les deux membres par x^3,

$$0=M+P. \qquad (4)$$

Les équations (2), (3) et (4) nous donnent les valeurs précédentes de M, N, P et Q. On a ainsi :

$$y=\int\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx+\int\frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx.$$

Or,

$$\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{1}{2}l\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right)+\text{arc tg}\left(x\sqrt{2}+1\right);$$

de même :

$$\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$=\frac{1}{2}l\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)-\text{arc tg}\left(x\sqrt{2}-1\right).$$

Par conséquent,

$$y=\frac{1}{4\sqrt{2}}l\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arc tg}\left(x\sqrt{2}+1\right)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arc tg}\left(x\sqrt{2}-1\right)$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}l\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arc tg}\frac{2x\sqrt{2}}{2-2x^2}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}l\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{arc tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

24. $y=\displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{x^4+x^2-2}=\int\frac{x^2\,dx}{(x^2-1)(x^2+2)}.$

En posant :

$$\frac{x^2}{(x^2-1)(x^2+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+2},$$

on a :

$$x^2=A(x+1)(x^2+2)+B(x-1)(x^2+2)+(Mx+N)(x^2-1);\quad (1)$$

pour $x=1$, on trouve $A=\frac{1}{6}$,

pour $x=-1$, $B=-\frac{1}{6}$.

En remplaçant dans (1), il vient ;

$$\frac{x^2 - \frac{1}{6}\left(x+1\right)\left(x^2+2\right)+\frac{1}{6}\left(x-1\right)\left(x^2+2\right)}{x^2-1} = Mx + N,$$

$$\frac{6x^2 - (x^3+x^2+2x+2) + (x^3-x^2+2x-2)}{6(x^2-1)} = Mx+N,$$

ou enfin

$$\frac{4(x^2-1)}{6(x^2-1)} = Mx + N = \frac{2}{3}.$$

Par conséquent,

$$M = 0, \qquad N = \frac{2}{3};$$

d'où :

$$y = \frac{1}{6}\,l\left(x-1\right) - \frac{1}{6}\,l\left(x-1\right) + \frac{2}{3}\int\frac{dx}{x^2+2}$$

$$= \frac{1}{6}\,l\,\frac{x-1}{x+1} + \frac{2}{3\sqrt{2}}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{\sqrt{2}}.$$

25. $y = \int\frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx$.

On a : $x^6+1 = (x^2+1)(x^4-x^2+1)$; or,

$$x^4-x^2+1 = x^4+2x^2+1-3x^2 = (x^2+1+x\sqrt{3})(x^2+1-x\sqrt{3}).$$

Nous poserons donc :

$$\frac{x^4+1}{x^6+1} = \frac{Mx+N}{x^2+1} + \frac{Px+Q}{x^2+x\sqrt{3}+1} + \frac{Rx+S}{x^2-x\sqrt{3}+1};$$

on tire de là :

$$\left.\begin{array}{l} x^4+1 = (Mx+N)(x^4-x^2+1)+(Px+Q)(x^2+1)(x^2-x\sqrt{3}+1) \\ \quad +(Rx+S)(x^2+1)(x^2+x\sqrt{3}+1). \end{array}\right\} \quad (1)$$

En faisant $x = \sqrt{-1}$, d'où $x^2 = -1$, $x^4 = 1$, on a :

$2 = 3\,(M\sqrt{-1} + N)$; par conséquent, $M = 0$, $N = \frac{2}{3}$.

Pour trouver P et Q, nous remplacerons x par l'une des racines de l'équation $x^2 + x\sqrt{3} + 1 = 0$, par exemple nous ferons $x = \frac{\sqrt{-1} - \sqrt{3}}{2}$. De cette même équation, on déduit $x^2 + 1 = -x\sqrt{3}$, et $x^4 + 1 = x^2$; ces valeurs substituées dans (1) donnent d'abord :

$$x^2 = (Px + Q)(-2x\sqrt{3})(-x\sqrt{3}),$$

ou bien :

$$x^2 = (Px + Q)\,6x^2,$$

c'est-à-dire

$$Px + Q = \frac{1}{6};$$

en faisant maintenant $x = \frac{\sqrt{-1} - \sqrt{3}}{2}$, il vient :

$$Q + P\left(\frac{\sqrt{-1} - \sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{6};$$ par conséquent, $P = 0$, $Q = \frac{1}{6}$.

Enfin, pour obtenir R et S, nous remplacerons x par l'une des racines de l'équation $x^2 - x\sqrt{3} + 1 = 0$, par exemple, nous ferons $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{-1}}{2}$; nous aurons aussi :

$$x^2 + 1 = x\sqrt{3}, \quad x^4 + 1 = x^2,$$

ce qui nous donne :

$$x^2 = (Rx + S)(2x\sqrt{3})(x\sqrt{3}) = 6x^2(Rx + S),$$

ou bien :

$$Rx + S = \frac{1}{6}.$$

En remplaçant x par sa valeur, $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{-1}}{2}$, il vient :

$$S + R\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{-1}}{2}\right) = \frac{1}{6},$$ par conséquent $R = 0$, $S = \frac{1}{6}$.

On a alors :

$$y = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x^2 + x\sqrt{3}+1} + \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x^2 - x\sqrt{3}+1},$$

ou bien :

$$y = \frac{2}{3}\text{arc tg}\, x + \frac{1}{3}\text{arc tg}\left(2x+\sqrt{3}\right) + \frac{1}{3}\text{arc tg}\left(2x-\sqrt{3}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\text{arc tg}\, x + \frac{1}{3}\text{ arc tg}\, \frac{4x}{1-(4x^2-3)}$$

$$= \frac{2}{3}\text{arc tg}\, x + \frac{1}{3}\text{ arc tg}\, \frac{x}{1-x^2}.$$

Or,

$$2 \text{ arc tg}\, x = \text{arc tg}\, \frac{2x}{1-x^2};$$

par suite,

$$y = \frac{1}{3}\text{arc tg}\frac{2x}{1-x^2} + \frac{1}{3}\text{arc tg}\frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{3}\text{arc tg}\, \frac{\frac{2x}{1-x^2}+\frac{x}{1-x^2}}{1-\frac{2x^2}{(1-x^2)^2}}$$

$$= \frac{1}{3}\text{ arc tg}\, \frac{3x(1-x^2)}{x^4-4x^2+1}.$$

26. $y = \int \frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+1)^2}\, dx.$

Nous poserons :

$$\frac{x(2x^2-x+5)}{(x^2+1)^2} = \frac{Mx+N}{(x^2+1)^2} + \frac{Px+Q}{x^2+1};$$

d'où :

$$x(2x^2-x+5) = Mx + N + (Px+Q)(x^2+1).$$

Pour $x = \sqrt{-1}$, on a :

$$\sqrt{-1}\,(3-\sqrt{-1}) = M\sqrt{-1} + N = 3\sqrt{-1}+1;$$

donc,

$$M = 3, \quad N = 1.$$

En remplaçant M et N par ces valeurs, et divisant par $(x^2+1)^2$, on a :

$$\frac{2x^3-x^2+5x-3x-1}{(x^2+1)^2}=\frac{Px+Q}{x^2+1};$$

par conséquent,

$$Px+Q=\frac{2x^3-x^2+2x-1}{x^2+1}=\frac{2x(x^2+1)-(x^2+1)}{x^2+1}=2x-1;$$

on a donc :

$$P=2,\quad Q=-1,\quad \text{et il vient :}$$

$$y=\int\frac{(3x+1)\,dx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{(2x-1)\,dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{2x\,dx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}+\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}-\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=-\frac{3}{2(x^2+1)}+\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+l\left(x^2+1\right)-\operatorname{arctg}x$$

$$=\frac{x-3}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}x+l\left(x^2+1\right).$$

27. $y=\int\frac{x^2\,dx}{(x^4+1)^2}=\int\frac{x^2\,dx}{(x^2+x\sqrt{2}+1)^2(x^2-x\sqrt{2}+1)^2}.$

On posera donc :

$$\frac{x^2}{(x^4+1)^2}=\frac{Mx+N}{(x^2+x\sqrt{2}+1)^2}+\frac{M'x+N'}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$
$$\frac{Px+Q}{(x^2-x\sqrt{2}+1)^2}+\frac{P'x+Q'}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

On en tire :

$$\left.\begin{array}{l}x^2=(Mx+N)(x^2-x\sqrt{2}+1)^2+(M'x+N')(x^2+x\sqrt{2}+1)\\ \quad(x^2-x\sqrt{2}+1)^2+(Px+Q)(x^2+x\sqrt{2}+1)^2+(P'x+Q')\\ \quad(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1)^2;\end{array}\right\}(1)$$

Comme nous avons des racines doubles, nous prendrons la dérivée première de (1), en ayant égard à la remarque du n° 15, et nous aurons :

$$\left.\begin{aligned}2x = x(Mx+N)(x^2-x\sqrt{2}+1)(2x-\sqrt{2})+M(x^2-x\sqrt{2}+1)^2\\ +(M'x+N')(x^2-x\sqrt{2}+1)^2(2x+\sqrt{2})+P(x^2+x\sqrt{2}+1)^2\\ +2(Px+Q)(x^2+x\sqrt{2}+1)(2x+\sqrt{2})\\ +(P'x+Q')(x^2+x\sqrt{2}+1)^2(2x-\sqrt{2})+\text{ etc.}\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

En substituant dans (1) l'une des racines de l'équation $x^2+x\sqrt{2}+1=0$, par exemple $x=\dfrac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, il ne restera que :

$$x^2=(Mx+N)(x^2-x\sqrt{2}+1)^2,$$

et comme $x^2+1=-x\sqrt{2}$, nous aurons :

$$x^2=8x^2(Mx+N),$$

ou bien : $Mx+N=\dfrac{1}{8}$, et en remplaçant x par sa valeur :

$$M\left(\frac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)+N=\frac{1}{8};\ \text{d'où } M=0,\ N=\frac{1}{8}.$$

De même, en remplaçant x par l'une des racines de l'équation $x^2-x\sqrt{2}+1=0$, par exemple en faisant $x=\dfrac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, et observant qu'alors $x^2+1=x\sqrt{2}$, on a :

$$x^2=8x^2\left(Px+Q\right),\ \text{ ou bien } Px+Q=\frac{1}{8};$$

d'où : $P\left(\dfrac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)+Q=\dfrac{1}{8}$; par suite, $P=0$, $Q=\dfrac{1}{8}$.

L'équation (2) donnera M', N', P' et Q'.

Pour avoir M' et N', nous ferons $x=\dfrac{-1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$, et, par conséquent, $x^2+1=-x\sqrt{2}$, ce qui nous donne d'abord :

$$\begin{aligned}2x=2(Mx+N)(-2x\sqrt{2})(2x-\sqrt{2})+M(8x^2)\\ +(M'x+N')(8x^2)(2x+\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Or, $M=0$, $N=\dfrac{1}{8}$, et par conséquent :

$$2x = -x(x\sqrt{2}-1) + (M'x+N')\,8x^2(x\sqrt{2}+1)\sqrt{2},$$

ou bien, en divisant par x, et réduisant :

$$1 + x\sqrt{2} = 8x\sqrt{2}(x\sqrt{2}+1)(M'x+N'),$$

ou bien :

$$1 = 8x\sqrt{2}(M'x+N').$$

Remplaçant enfin x par sa valeur, on a :

$$1 = 8\left(\sqrt{-1}-1\right)\left[N' + \frac{M'(\sqrt{-1}-1)}{\sqrt{2}}\right],$$

$$\sqrt{2} = 8(\sqrt{-1}-1)(N'\sqrt{2} + M'\sqrt{-1} - M').$$

On tire de là :

$$N'\sqrt{2} - 2M' = 0, \qquad -N' = \frac{1}{8};$$

d'où :

$$N' = -\frac{1}{8}, \qquad M' = -\frac{1}{8\sqrt{2}}.$$

La même équation (2) nous donnera, pour $x = \dfrac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$,
et, en observant que $x^2+1 = x\sqrt{2}$,

$$Q' = -\frac{1}{8}, \qquad P' = \frac{1}{8\sqrt{2}}.$$

On a donc :

$$y = \frac{1}{8}\int\frac{dx}{(x^2+x\sqrt{2}+1)^2} + \frac{1}{8}\int\frac{dx}{(x^2-x\sqrt{2}+1)^2} - \frac{1}{8}\int\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+1\right)dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$

$$+\frac{1}{8}\int\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-1\right)dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

Or,

$$\int\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+1\right)dx}{x^2+x\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\left(x\sqrt{2}+1\right);$$

$$\int\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-1\right)dx}{x^2-x\sqrt{2}+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{(x-\sqrt{2})\,dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2-x\sqrt{2}+1}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\text{arc tg}\left(x\sqrt{2}-1\right);$$

$$\int\frac{dx}{(x^2+x\sqrt{2}+1)^2} = \int\frac{dx}{\left[\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]^2} = \int\frac{\frac{dz}{\sqrt{2}}}{\left[\frac{1}{2}\left(1+z^2\right)\right]^2}$$

$$= 2\sqrt{2}\left\{\frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\text{arc tg}\,z\right\}$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{x\sqrt{2}+1}{1+(x\sqrt{2}+1)^2} + \text{arc tg}\left(x\sqrt{2}+1\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{x\sqrt{2}+1}{2(x^2+x\sqrt{2}+1)} + \text{arc tg}\left(x\sqrt{2}+1\right)\right];$$

de même,

$$\int\frac{dx}{(x^2-x\sqrt{2}+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{x\sqrt{2}-1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \sqrt{2}\,\text{arctg}\left(x\sqrt{2}-1\right).$$

On a donc :

$$y = \frac{1}{8\sqrt{2}}\,\frac{x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{8}\text{arc tg}\left(x\sqrt{2}+1\right)$$

$$+ \frac{1}{8\sqrt{2}}\,\frac{x\sqrt{2}-1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{8}\text{arc tg}\left(x\sqrt{2}-1\right)$$

$$- \frac{1}{16\sqrt{2}}\,l\left(x^2+x\sqrt{2}+1\right) - \frac{1}{8\sqrt{2}}\text{arc tg}\left(x\sqrt{2}+1\right)$$

$$+\frac{1}{16\sqrt{2}}\,l\left(x^2 - x\sqrt{2}+1\right) - \frac{1}{8\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\left(x\sqrt{2}-1\right);$$

ou bien :

$$y = \frac{1}{8\sqrt{2}}\left[\frac{x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} + \frac{x\sqrt{2}-1}{x^2-x\sqrt{2}+1}\right]$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \frac{1}{16\sqrt{2}}\,l\,\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$

$$-\frac{1}{8\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$$

$$=\frac{1}{4}\frac{x^3}{x^4+1} + \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \frac{1}{16\sqrt{2}}\,l\,\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}$$

$$-\frac{1}{8\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}.$$

$$=\frac{x^3}{4(x^4+1)} + \frac{1}{8\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2} + \frac{1}{16\sqrt{2}}\,l\,\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}.$$

Applications.

1. $y = \int \frac{ax+b}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{a}{2(1+x^2)} + \frac{b}{2}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{bx}{2(1+x^2)}.$

2. $y = \int \frac{(x+1)\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x-1}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x.$

3. $y = \int \frac{(x^2+1)\,dx}{x(x^2-1)} = l\,\frac{x^2-1}{x}.$

4. $y = \int \frac{dx}{x(x+1)(x+2)} = l\,\frac{\sqrt{x(x+2)}}{x+1}.$

5. $y = \int \frac{x\,dx}{(x+2)(x+3)^2} = -\frac{3}{x+3} + l\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2.$

6. $y = \frac{(5x^2-7x)dx}{x^4-3x^3+x^2+3x-2} = l\,\frac{(x-2)^2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}.$

7. $y = \int \frac{dx}{1 - x^4} = \frac{1}{4} l \frac{1 + x}{1 - x} + \frac{1}{2} \text{arc tg } x$.

8. $y = \int \frac{(x^2 - x + 1) dx}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{10}{3\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \frac{2(x + 2)}{3(x^2 + x + 1)}$.

9. $y = \int \frac{dx}{x^2 (x^4 - 1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{4} l \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{1}{2} \text{arc tg } x$.

10. $y = \int \frac{x\, dx}{a^3 + x^3} = - \frac{1}{6a} l \frac{(a + x)^2}{a^2 - ax + x^2}$

$- \frac{1}{a\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{2x - a}{a\sqrt{3}}$.

11. $y = \int \frac{dx}{x^3 + a^3} = \frac{1}{6a^2} l \frac{(x + a)^2}{x^2 - ax + a^2} - \frac{1}{a^2\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{2x - a}{a\sqrt{3}}$.

12. $y = \int \frac{2x\, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} = l \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 + 3}}$.

13. $y = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} dx = x + l \frac{(x - 1)^2}{x}$.

14. $y = \int \frac{dx}{x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1} = \frac{x + 1}{4(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \text{arctg} x$

$+ \frac{1}{4} l \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

15. $y = \int \frac{dx}{(x^4 - 1)^2} = - \frac{x}{4(x^4 - 1)} + \frac{3}{16} l \frac{x + 1}{x - 1} + \frac{3}{8} \text{arctg} x$.

16. $y = \int \frac{(1 - x + x^2) dx}{1 + x + x^2 + x^3} = \frac{1}{2} l \frac{(1 + x)^3}{\sqrt[4]{1 + x^2}} - \frac{1}{2} \text{arc tg } x$.

17. $y = \int \frac{(1 + x^2) dx}{\{1 - e + (1 + e) x^2\}^2} = \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \text{arctg} x \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}$

$+ \frac{e}{1 - e^2} \frac{x}{1 - e + (1 + e) x^2}$.

VI. — Intégration des fonctions irrationnelles.

1. $y = \int \frac{x - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}}{1 - \sqrt{x}} dx$. En posant $x = z^6$, d'où $dx = 6 z^5 dz$, il vient :

$$y = \int \frac{z^6 - z^3 + z^4}{1 - z^3} 6 z^5 dz = 6 \int \frac{z^3 + z - 1}{1 - z^3} z^8 dz$$

$$= -6 \int z^8 dz + 6 \int \frac{z^9 dz}{1 - z^3}$$

$$= -6 \int z^8 dz - 6 \int \frac{z^9 - 1}{z^3 - 1} dz - 6 \int \frac{dz}{z^3 - 1}$$

$$= -\frac{6 z^9}{9} - 6 \int (z^6 + z^3 + 1) dz - 6 \int \frac{dz}{z^3 - 1}.$$

Or, on trouve facilement :

$$\int \frac{dz}{z^3 - 1} = \frac{1}{3} l (z - 1) - \frac{1}{6} l (z^2 + z + 1)$$
$$- \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{2z + 1}{\sqrt{3}}.$$

Par conséquent,

$$y = -\frac{2 z^9}{3} - \frac{6 z^7}{7} - \frac{3 z^4}{2} + 6 z - 2 l (z - 1)$$
$$+ l (z^2 + z + 1) - 2\sqrt{3} \text{arc tg} \frac{2z + 1}{\sqrt{3}}$$
$$= -\frac{2}{3} x \sqrt{x} - \frac{6}{7} x \sqrt[6]{x} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 6 \sqrt[6]{x} - 2 l (\sqrt[6]{x} - 1)$$
$$+ l (\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + 1) - 2\sqrt{3} \text{arc tg} \left(\frac{2\sqrt[6]{x} + 1}{\sqrt{3}}\right).$$

2. $y = \int \frac{x - \sqrt{1 + x}}{1 + \sqrt[4]{1 + x}} dx$. En posant $1 + x = z^4$,

d'où $dx = 4\,z^3\,dz$, il vient :

$$y = \int \frac{z^4 - 1 - z^2}{1+z} 4z^3 dz = 4\int \left(z^6 - z^5 - z^3 + z - 1 + \frac{1}{1+z}\right) dz$$

$$= 4\frac{z^7}{7} - \frac{2\,z^6}{3} - \frac{4\,z^3}{3} + 2\,z^2 - 4\,z + 4\,l\left(1+z\right)$$

$$= \frac{4}{7}\left(1+x\right)\sqrt[4]{\left(1+x\right)^3} - \frac{2}{3}\left(1+x\right)\sqrt{1+x}$$

$$-\frac{4}{3}\sqrt[4]{\left(1+x\right)^3} - 2\sqrt{1+x} - 4\sqrt[4]{1+x} + 4\,l\left(1+\sqrt[4]{1+x}\right).$$

3. $y = \int \frac{a\sqrt[3]{x^2} - b\sqrt{x}}{c\sqrt{x}\sqrt[3]{x} + e\,x}\,dx$. En posant $\sqrt[6]{x} = z$, ou $x = z^6$, $dx = 6\,z^5\,dz$, on a :

$$y = \int \frac{a\,z^4 - b\,z^3}{c\,z^5 + e\,z^6}\,6\,z^5\,dz = 6\int \frac{a\,z^4 - b\,z^3}{c + e\,z}\,dz$$

$$= 6\int \frac{z^3\,(a\,z - b)}{c + e\,z}\,d\,z = 6\,a\int \frac{z^4\,d\,z}{c + ez} - 6\,b\int \frac{z^3\,d\,z}{c + e\,z}\,.$$

Si nous posons $c + ez = u$, d'où $z = \frac{u - c}{e}$, il viendra :

$$y = \frac{6\,a\,u^4}{4\,e^5} - \frac{8\,a\,c\,u^3}{e^5} + \frac{18\,a\,c^2\,u^2}{e^5} - \frac{24\,a\,c^3\,u}{e^5} + \frac{6\,a\,c^4}{e^5}\,l u$$

$$-\frac{2\,b}{e^4}\,u^3 + \frac{9\,b\,c}{e^4}\,u^2 - \frac{18\,b\,c^2}{e^4}\,u + \frac{6\,b\,c^3}{e^4}\,l\,u\,,$$

et il restera à remplacer u par sa valeur :

$$u = c + e\,z = c + e\sqrt[6]{x}\,.$$

4. $y = \int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx}}$; posons $a + b\,x = z^2$, d'où $b\,dx = 2z\,dz$.

Nous aurons :

$$y = \frac{1}{b}\int \frac{2\,z\,d\,z}{\left(\frac{z^2 - a}{b}\right)z} = \int \frac{2\,d\,z}{z^2 - a} = 2\int \frac{dz}{z^2 - a} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,l\,\frac{z - \sqrt{a}}{z + \sqrt{a}};$$

par suite,

$$y = \frac{1}{\sqrt{a}}\, l\, \frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}.$$

5. $y = \int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$. En posant $1+x=z^2$, il vient :

$$y = \int \frac{2\,z\,d\,z}{(1+z^2)\,z} = 2 \text{ arc tg } z \text{ ; par conséquent :}$$

$$y = 2 \text{ arc tg } \sqrt{1+x} :$$

6. $y = \int \frac{dx}{x^3\sqrt{x-1}}$. En posant $x-1=z^2$, on a :

$$y = 2\int \frac{dz}{(z^2+1)^3} = \frac{3}{4} \text{ arc tg } z + \frac{3}{4}\frac{z}{1+z^2} + \frac{1}{2}\frac{z}{(1+z^2)^2};$$

par conséquent,

$$y = \frac{3}{4} \text{ arc tg } \sqrt{x-1} + \frac{3}{4}\frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2}$$

$$= \frac{3}{4} \text{ arc tg } \sqrt{x-1} + \frac{3x+2}{4}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2}.$$

Or, en posant $\text{arc tg } \sqrt{x-1} = \alpha$, on a :

$\sqrt{x-1} = \text{tg}\,\alpha$, d'où $x = 1 + \text{tg}^2\,\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$,

ou bien : $\alpha = \text{arc cos } \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Donc,

$$y = \frac{3}{4} \text{ arc cos } \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3x+2}{4}\frac{\sqrt{x-1}}{x^2}.$$

7. $y = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x}}$. En posant $1-x=z^2$, on a :

$$y = -2\int\left(1-3z^2+3z^4-z^6\right)dz = 2\int\left(z^6-3z^4+3z^2-1\right)dz$$

$$y = \frac{2z^7}{7} - \frac{6z^5}{5} + \frac{6z^3}{3} - 2z;$$ et, après quelques réductions,

$$y = -\frac{2\sqrt{1-x}}{35}\left(5x^3 + 6x^2 + 8x + 16\right).$$

8. $y = \int \frac{dx}{x\sqrt{(a+bx)^3}}$. En posant $a + bx = z^2$, on trouve :

$$y = 2\int \frac{dz}{z^2(z^2-a)}.$$

Or,

$$\frac{1}{z^2(z^2-a)} = \frac{1}{a}\frac{a+z^2-z^2}{z^2(z^2-a)} = \frac{1}{a(z^2-a)} - \frac{1}{a z^2};$$

d'où :

$$y = \frac{2}{a}\int\frac{dz}{z^2-a} - \frac{2}{a}\int\frac{dz}{z^2} = \frac{1}{a\sqrt{a}}\, l\,\frac{z-\sqrt{a}}{z+\sqrt{a}} + \frac{2}{az}$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{a}}\, l\,\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} + \frac{2}{a\sqrt{a+bx}}.$$

9. $y = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$. En posant $x = \cos\varphi$,

d'où $dx = -\sin\varphi\, d\varphi$, on a :

$$y = -\int\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{(1+\cos\varphi)\sin\varphi} = -\int\frac{d\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi.$$

Or, de $\cos\varphi = x$, on tire :

$\cos^2\frac{1}{2}\varphi - \sin^2\frac{1}{2}\varphi = x$, et comme on a :

$\cos^2\frac{1}{2}\varphi + \sin^2\frac{1}{2}\varphi = 1$,

il vient :

$$\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi = \frac{1-x}{1+x}.$$

Donc,

$$y = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

10. On peut encore trouver cette intégrale en posant :

$$\sqrt{1-x^2} = xz + 1,$$

ce qui donne :

$$1 - x^2 = x^2 z^2 + 2xz + 1,$$
$$-x = xz^2 + 2z,$$
$$-dx = z^2\,dx + 2xz\,dz + 2\,dz,$$
$$-dx\,(1+z^2) = 2(xz+1)\,dz,$$

et enfin $$\frac{dx}{xz+1} = -\frac{2\,dz}{1+z^2}.$$

On a donc, puisque $x = -\frac{2z}{1+z^2}$, et $1 + x = \frac{(1-z)^2}{1+z^2}$,

$$y = -2\int\frac{dz}{(1-z)^2} = -\frac{2}{1-z} = \frac{2}{z-1} = \frac{2}{\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x} - 1}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}-1-x} = \frac{2x}{\sqrt{1+x}\left[\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}\right]}$$

$$= \frac{2x(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}\,(1-x-1-x)} = \frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{-\sqrt{1+x}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - 1 + \text{const} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

Cette dernière valeur de y ne diffère de la précédente que par la constante.

Remarque. — On serait encore arrivé au même résultat en posant :

$$1 - x = (1+x)\,\mathrm{tg}^2\varphi,$$

d'où :

$$x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \cos 2\varphi, \quad dx = -2 \sin 2\varphi \, d\varphi .$$

Par conséquent,

$$y = -2\int \frac{\sin 2\varphi \, d\varphi}{(1+x)^2 \operatorname{tg} \varphi} = -2\int \frac{\sin 2\varphi \, d\varphi}{(1+\cos 2\varphi)^2 \operatorname{tg} \varphi}.$$

Or, $1 + \cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi$; donc :

$$y = -2\int \frac{\sin 2\varphi \, d\varphi}{4\cos^4 \varphi \operatorname{tg} \varphi} = -\int \frac{\sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{\sin \varphi \cos^3 \varphi} = -\int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$= -\operatorname{tg} \varphi = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C .$$

Les trois méthodes que nous venons de développer sont très souvent appliquées.

11. $y = \displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

Comme la quantité sous le radical est $1 + x^2$, il y a avantage à poser :

$$x = \operatorname{tg} \varphi, \text{ d'où } dx = \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad 1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi},$$

par suite :

$$y = \int \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \cos^3 \varphi = \int \cos \varphi \, d\varphi = \sin \varphi .$$

Or, de $\operatorname{tg} \varphi = x$, on tire $\sin \varphi = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; donc :

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On peut encore intégrer l'expression précédente en posant :

$\sqrt{1+x^2} = z - x$, ce qui donne successivement :

$$1 + x^2 = z^2 + x^2 - 2zx ,$$

$$1 = z^2 - 2zx\,,$$

$$0 = 2z\,dz - 2x\,dz - 2z\,dx\,,$$

d'où :

$$\frac{dx}{z-x} = \frac{dz}{z}\,.$$

On a aussi $x = \frac{z^2 - 1}{2z}$; par conséquent $1 + x^2 = \frac{(1+z^2)^2}{4z^2}$.

On a alors :

$$y = \int \frac{4z^2\,dz}{z\,(1+z^2)^2} = 4\int \frac{z\,dz}{(1+z^2)^2} = -\frac{2}{1+z^2}$$

$$= -\frac{2}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2} = -\frac{2}{1+x^2+2x\sqrt{1+x^2}+1+x^2}$$

$$= -\frac{2}{2\sqrt{1+x^2}\,\{x+\sqrt{1+x^2}\}} = -\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{-\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \text{const}\,.$$

13. $y = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$. En posant comme tantôt

$\sqrt{1+x^2} = z - x$, il vient : $\frac{dx}{z-x} = \frac{dz}{z}$;

donc, $y = \int \frac{dz}{z} = l\,z = l\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Remarque. — En posant $\sqrt{1+x^2} = xz + 1$, d'où

$x^2 = x^2 z^2 + 2xz$, on a : $\frac{dx}{xz+1} = \frac{2\,dz}{1-z^2}$;

$$y = 2\int \frac{dz}{1-z^2} = l\,\frac{1+z}{1-z} = l\,\frac{\sqrt{1+x^2}-1+x}{-\sqrt{1+x^2}+1+x}$$

$$= l\,\frac{(x+\sqrt{1+x^2}-1)^2}{x^2-(\sqrt{1+x^2}-1)^2} = l\,\frac{2(x+\sqrt{1+x^2})[\sqrt{1+x^2}-1]}{2\,\{\sqrt{1+x^2}-1\}}$$

$$= l\,(x + \sqrt{1 + x^2})\,.$$

Cette intégrale se rencontre très souvent en analyse.

14. $y = \int \frac{dx}{\sqrt{a\,x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2}}\,.$

Posons :

$$\frac{a}{2} - x = \frac{a}{2}\,z\,, \quad \text{d'où} \quad dx = -\frac{a}{2}\,dz\,; \text{ nous aurons :}$$

$$y = \int \frac{-\frac{a}{2}\,dz}{\frac{a}{2}\sqrt{1 - z^2}} = \text{arc cos } z = \text{arc cos } \frac{a - 2\,x}{a}\,.$$

15. $y = \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 - 1}}$. Posons $x - 1 = (x + 1)\,\text{tg}^2\,\varphi$,

d'où : $x = \frac{1 + \text{tg}^2\,\varphi}{1 - \text{tg}^2\,\varphi} = \frac{1}{\cos 2\,\varphi}\,,$

$$dx = \frac{2 \sin 2\,\varphi\, d\,\varphi}{\cos^2 2\,\varphi}\,, \qquad 1 + x = \frac{2 \cos^2 \varphi}{\cos\ 2\,\varphi}\,.$$

Par suite,

$$y = \int \frac{2\sin 2\varphi d\varphi}{\cos^2 2\varphi \left(\frac{2\cos^2\varphi}{\cos 2\,\varphi}\right)^2 \text{tg}\varphi} = \int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \text{tg}\varphi = \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}}\,.$$

Remarque. — On arrive au même résultat en posant :

$$\sqrt{x^2 - 1} = z - x\,.$$

16. $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{2\,a\,x - x^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - (a - x)^2}}.$

En posant $a - x = a\,z$, on trouve :

$$y = -a \int \frac{(1 - z)\,dz}{\sqrt{1 - z^2}} = -a \int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} + a \int \frac{z\,dz}{\sqrt{1 - z^2}}$$

$$= a \text{ arc cos } \frac{a - x}{a} - \sqrt{2\,a\,x - x^2}.$$

17. $x = \int \frac{v_0^2\,d\,y}{\sqrt{(v_0^2 - 2\,g\,y)^2 - v_0^4}}$. En posant $v_0^2 - 2\,g\,y = z$,

on a :

$$x = -\frac{v_0^2}{2g}\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - v_0^4}} = -\frac{v_0^2}{2g}\,l\left(z + \sqrt{z^2 - v_0^4}\right)$$

$$= -\frac{v_0^2}{2g}\,l\left\{v_0^2 - 2\,g\,y + \sqrt{(v_0^2 - 2\,g\,y)^2 - v_0^4}\right\}.$$

18. $y = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$. En divisant les deux termes par x^2,

il vient :

$$y = \int \frac{\frac{dx}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \text{arc cos } \frac{1}{x}.$$

19. $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 - x - x^2}}$. Posons $\sqrt{1 - x - x^2} = x\,z + 1$,

nous aurons :

$$1 \cdot x - x^2 = x^2 z^2 + 2\,x\,z + 1,$$

$$-1 - x = x\,z^2 + 2\,z,$$

d'où $\qquad -dx\,(1 + z^2) = 2\,(x\,z + 1)\,dz,$

ou bien :

$$\frac{dx}{x\,z + 1} = -\frac{2\,dz}{1 + z^2};$$

or,

$$x = -\frac{2\,z + 1}{z^2 + 1}.$$

Par conséquent :

$$y = \int \frac{2(2z+1)\,dz}{(1+z^2)^2} = 2\int \frac{2z\,dz}{(1+z^2)^2} + 2\int \frac{dz}{(1+z^2)^2}$$

$$= -\frac{2}{1+z^2} + 2\left[\frac{z}{2(1+z^2)} + \frac{1}{2}\,\text{arc tg}\, z\right]$$

$$= -\frac{2x^2}{x^2 + \{\sqrt{1-x-x^2}-1\}^2}$$

$$+ \frac{x\{\sqrt{1-x-x^2}-1\}}{x^2+\{\sqrt{1-x-x^2}-1\}^2} + \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{1-x-x^2}-1}{x}.$$

Les deux premiers termes nous donnent :

$$-\frac{x\{\sqrt{1-x-x^2}-(2x+1)\}\{2\sqrt{1-x-x^2}-(x-2)\}}{\{2\sqrt{1-x-x^2}+(x-2)\}\{2\sqrt{1-x-x^2}-(x-2)\}}$$

$$= -x\,\frac{-5x-5x\sqrt{1-x-x^2}}{-5x^2}$$

$$= -(1+\sqrt{1-x-x^2}).$$

Donc,

$$y = -\sqrt{1-x-x^2} + \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{1-x-x^2}-1}{x} + C.$$

Remarque. — La valeur complète de y serait, d'après ce qui précède :

$$y = -1 - \sqrt{1-x-x^2} + \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{1-x-x^2}-1}{x} + C';$$

mais nous faisons entrer -1 dans la constante C.

20. $y = \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$. En posant $x = \text{tg}\,\varphi$,

d'où $dx = \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$, nous aurons :

$$y = \int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\left(1-\text{tg}^2\varphi\right)\frac{1}{\cos\varphi}} = \int \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{1-2\sin^2\varphi}.$$

Posant ensuite $\sqrt{2}\sin\varphi = z$, il vient :

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{1+\sqrt{2}\sin\varphi}{1-\sqrt{2}\sin\varphi}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{1+\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}}}{1-\dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}.$$

21. $$y = \int\frac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2}\,dx = \int\frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}$$

$$+\int\frac{x^2\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}$$

$$+\frac{1}{2}\,l\,\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2})}{(\sqrt{1+x^2}+x)(\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2})}.$$

22. $y = \displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$. Comme la quantité sous le radical est $1-x^2$, nous poserons $x = \sin\varphi$, ce qui nous débarrasse de ce radical. On a alors :

$$y = \int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1+\sin^2\varphi)\cos\varphi} = \int\frac{d\varphi}{1+\sin^2\varphi} = \int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi}$$

$$= \int\frac{\dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{1+2\,\mathrm{tg}^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\ tg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\ tg}\left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

23. $y = \displaystyle\int\frac{x^2\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$. En posant $x = \sin\varphi$, il vient :

$$y = \int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{1+\sin^2\varphi} = \int d\varphi - \int\frac{d\varphi}{1+\sin^2\varphi}$$

$$= \varphi - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\ tg}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi\right).$$

$$= \text{arc sin } x - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ arc tg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} \right).$$

Remarque. — On aurait pu écrire immédiatement :

$$y = \int \frac{(1+x^2-1)\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}},$$

etc.

24. $$y = \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}\,dx = \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$-\int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{2} \text{ arc tg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$- \text{arc sin } x.$$

25. On peut aussi intégrer cette expression en posant :

$x = \sin\varphi$, ce qui donne :

$$y = 2\int \frac{d\varphi}{1+\sin^2\varphi} - \int d\varphi = \sqrt{2} \text{ arc tg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$- \text{arc sin } x.$$

26. $y = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. En posant $x = \sin\varphi$, il vient :

$$y = \int \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sin^2\varphi\cos\varphi} = \int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = -\text{cotg}\,\varphi = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

27. $$y = \int \frac{x^4\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{(1+x^4-1)\,dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

En posant $x = \sin\varphi$, on a :

$$y = \int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - \int \frac{(1+\sin^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi}{\cos\varphi}$$

$$= \text{tg}\varphi - \int \left(1+\sin^2\varphi\right) d\varphi = \text{tg}\,\varphi - \varphi - \int \sin^2\varphi\,d\varphi$$

$$= \operatorname{tg}\varphi - \varphi - \left[-\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right]$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

$$= \frac{x(3-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{2}\arcsin x .$$

28. $y = \int \frac{-x\,dx}{\sqrt{2kx^2 - (c^2+\mu')x^4 - \mu}}$. En posant $x^2 = z$,

il vient :

$$y = \frac{1}{2}\int \frac{-dz}{\sqrt{-\mu + 2kz - (c^2+\mu')z^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{-\sqrt{c^2+\mu'}\,dz}{\sqrt{-\mu(c^2+\mu') + 2k(c^2+\mu')z - (c^2+\mu')^2 z^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{-\sqrt{c^2+\mu'}\,dz}{\sqrt{k^2 - \mu(c^2+\mu') - [(c^2+\mu')z - k]^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{-\sqrt{c^2+\mu'}\,dz}{\sqrt{k^2-\mu(c^2+\mu')}\sqrt{1 - \frac{\{(c^2+\mu')z - k\}}{k^2 - \mu(c^2+\mu')}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{c^2+\mu'}}\arccos\frac{(c^2+\mu')z - k}{\sqrt{k^2-\mu(c^2+\mu')}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{c^2+\mu'}}\arccos\frac{(c^2+\mu')x^2 - k}{\sqrt{k^2-\mu(c^2+\mu')}} .$$

29. $y = \int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$. Posons $x + 1 = (x-1)\operatorname{tg}^2\varphi$,

d'où :

$$x = \frac{\operatorname{tg}^2\varphi + 1}{\operatorname{tg}^2\varphi - 1}; \qquad dx = -\frac{4\operatorname{tg}\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi(\operatorname{tg}^2\varphi - 1)^2},$$

$$(x^2-1)\sqrt{x^2-1}=(x-1)^3\,\mathrm{tg}^3\varphi=\frac{8\,\mathrm{tg}^3\varphi}{(\mathrm{tg}^2\varphi-1)^3}\,.$$

$$y=-\int\frac{4\,\mathrm{tg}\,\varphi\,d\varphi\,(\mathrm{tg}^2\varphi-1)^3}{\cos^2\varphi\,(\mathrm{tg}^2\varphi-1)^2\,8\,\mathrm{tg}^3\varphi}=-\frac{1}{2}\int\frac{(\mathrm{tg}^2\varphi-1)\,d\varphi}{\sin^2\varphi}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}+\frac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{\sin^2\varphi}=-\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\varphi-\frac{1}{2}\,\mathrm{cotg}\,\varphi$$

$$=-\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{tg}^2\varphi+1}{\mathrm{tg}\,\varphi}=-\frac{1}{2}\,\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,.$$

30. $y=\int\frac{\mathrm{arc\,tg}\,x\,dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$. Posons $\mathrm{arc\,tg}\,x=z$, d'où :

$$\frac{dx}{1+x^2}=dz\,,\qquad x=\mathrm{tg}\,z\,;\ \text{on aura :}$$

$$y=\int\frac{z\,dz}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 z}}=\int z\cos z\,dz$$

$$=z\sin z-\int\sin z\,dz=z\sin z+\cos z$$

$$=\frac{x\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

31. $y=\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,l\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)dx$

$$=-\sqrt{1-x^2}\,l\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)+\int\sqrt{1-x^2}\,\frac{2\,a\,b\,dx}{a^2-b^2x^2}$$

$$=-\sqrt{1-x^2}\,l\left(\frac{a+bx}{a-bx}\right)+2\,a\,b\int\frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{a^2-b^2x^2}\,.$$

Pour trouver l'intégrale

$A=\int\frac{\sqrt{1-x^2}\,dx}{a^2-b^2x^2}$, posons $x=\sin\varphi$, et nous aurons :

$$A = \int \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{a^2 - b^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1}{b^2} \int \frac{b^2 (1 - \sin^2 \varphi) \, d\varphi}{a^2 - b^2 \sin^2 \varphi}$$

$$= \int \frac{b^2 - b^2 \sin^2 \varphi + a^2 - a^2}{a^2 - b^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{b^2} \int d\varphi - \frac{a^2 - b^2}{b^2} \int \frac{d\varphi}{a^2 - b^2 \sin^2 \varphi}$$

$$= \frac{1}{b^2} \varphi - \frac{a^2 - b^2}{b^2} \int \frac{d\varphi}{a^2 \cos^2 \varphi + (a^2 - b^2) \sin^2 \varphi} .$$

$$= \frac{1}{b^2} \varphi - \frac{a^2 - b^2}{b^2} \int \frac{\dfrac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}}{a^2 + (a^2 - b^2) \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

$$= \frac{1}{b^2} \varphi - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a\, b^2} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \operatorname{tg} \varphi \right];$$

$$y = - \sqrt{1 - x^2} \, l \left(\frac{a + b x}{a - b x} \right) + \frac{2 a}{b} \operatorname{arc\,sin} x$$

$$- \frac{2 \sqrt{a^2 - b^2}}{b} \operatorname{arc\,tg} \frac{x \sqrt{a^2 - b^2}}{a \sqrt{1 - x^2}} .$$

32. $y = \int \dfrac{l\, x\, dx}{(a + b x^2) \sqrt{a + b x^2}}$.

En posant $b x^2 = a \operatorname{tg}^2 \varphi$, d'où $x = \dfrac{\sqrt{a} \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{b}}$,

$dx = \sqrt{\dfrac{a}{b}} \dfrac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$, on a :

$$y = \int \frac{l \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} \varphi \right) \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}}{a (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \sqrt{a} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$$

$$= \frac{1}{a \sqrt{b}} \int \frac{l \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} \varphi \right) d\varphi}{\dfrac{1}{\cos \varphi}}$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{b}} \int \cos\varphi \, d\varphi \, l\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} \varphi\right)$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{b}} \left[\sin\varphi \, l \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg}\varphi\right) - \int \frac{\sin\varphi \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg}\varphi} \right]$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{b}} \left[\sin\varphi \, l \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg}\varphi\right) - \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \right]$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{b}} \left[\sin\varphi \, l \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg}\varphi\right) + l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{b}} \left[\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a + b x^2}} \, l\, x + l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arc\,tg} x \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{b}} \left[\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a + b x^2}} \, l\, x - l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \operatorname{arc\,tg} x \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \right].$$

$$= \frac{1}{a\sqrt{b}} \left[\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a + b x^2}} \, l\, x - l \frac{1 + x\sqrt{\frac{b}{a}}}{1 + x\sqrt{\frac{b}{a}}} \right]$$

$$= \left[\frac{x\, l\, x}{a\sqrt{a + b x^2}} - \frac{1}{a\sqrt{b}} \, l \left(\frac{1 + x\sqrt{\frac{b}{a}}}{1 - x\sqrt{\frac{b}{a}}} \right) \right].$$

33. $y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}$.

Posons $1 + x^2 = (1 - x^2) z^2$; nous aurons :

$$x^2 = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}, \quad x = \sqrt{\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}}, \quad 1 - x^2 = \frac{z}{z^2 + 1},$$

$$dx = \frac{2\, z\, dz}{(z^2 + 1)\sqrt{z^4 - 1}}.$$

$$y = \int \frac{2\,z\,dz}{(z^2+1)\sqrt{z^4-1}\,\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{z^2+1}}\left(z-1\right)}$$

$$= \sqrt{2}\int \frac{z\,dz}{(z^2+1)\sqrt{z^2-1}\,(z-1)}.$$

En posant $z+1=(z-1)\,\mathrm{tg}^2\,\varphi$, on a : $z = \dfrac{\mathrm{tg}^2\,\varphi+1}{\mathrm{tg}^2\,\varphi-1}$.

$$dz = -\frac{4\,\mathrm{tg}\,\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi\,(\mathrm{tg}^2\,\varphi-1)^2},\quad z^2+1=\frac{2\,(\mathrm{tg}^4\,\varphi+1)}{(\mathrm{tg}^2\,\varphi-1)^2},$$

$$\sqrt{z^2-1}=(z-1)\,\mathrm{tg}\,\varphi,\qquad z-1=\frac{2}{\mathrm{tg}^2\,\varphi-1},$$

d'où :

$$y = -\sqrt{2}\int \frac{\left(\dfrac{\mathrm{tg}^2\,\varphi+1}{\mathrm{tg}^2\,\varphi-1}\right)\dfrac{4\,\mathrm{tg}\,\varphi\,d\varphi}{\cos^2\varphi\,(\mathrm{tg}^2\,\varphi-1)^2}}{\dfrac{2\,(\mathrm{tg}^4\,\varphi+1)}{(\mathrm{tg}^2\,\varphi-1)^2}\,\dfrac{4}{\mathrm{tg}^2\,\varphi-1}\,\mathrm{tg}\,\varphi}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{(\mathrm{tg}^4\,\varphi-1)\,d\varphi}{(\mathrm{tg}^4\,\varphi+1)\cos^2\varphi}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}+\sqrt{2}\int\frac{\dfrac{d\varphi}{\cos^2\varphi}}{\mathrm{tg}^4\,\varphi+1}.$$

En posant $\mathrm{tg}\,\varphi = v$, il vient :

$$\int\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\,(\mathrm{tg}^4\,\varphi+1)} = \int\frac{dv}{1+v^4}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\,l\,\frac{v^2+v\sqrt{2}+1}{v^2-v\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{v\sqrt{2}}{1-v^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\,l\,\frac{\mathrm{tg}^2\,\varphi+\mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{2}+1}{\mathrm{tg}^2\,\varphi-\mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,\varphi\sqrt{2}}{1-\mathrm{tg}^2\varphi}\right).$$

Par suite,

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \varphi + \frac{1}{4}\, l\, \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{tg} \varphi \sqrt{2} + 1}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi \sqrt{2} + 1}$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi \sqrt{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} + \frac{1}{4}\, l\, \frac{\frac{z+1}{z-1} + \sqrt{2}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} + 1}{\frac{z+1}{z-1} - \sqrt{2}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} + 1}$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}}{1 - \frac{z+1}{z-1}}\right)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} + \frac{1}{4}\, l\, \frac{2z + \sqrt{2}\sqrt{z^2-1}}{2z - \sqrt{2}\sqrt{z^2-1}}$$

$$- \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{2}}\right)$$

Mais, on trouve facilement que :

$$\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}},$$

$$l\, \frac{2z + \sqrt{2}\sqrt{z^2-1}}{2z - \sqrt{2}\sqrt{z^2-1}} = l\, \frac{2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}} - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}$$

$$= l\, \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} - x} = l\, \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^2}{1}$$

$$= 2\, l\, (\sqrt{1+x^2} + x);$$

$$\text{arc tg}\frac{\sqrt{z^2-1}}{\sqrt{2}} = \text{arc tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin}\, x\,.$$

On a donc :

$$y = -\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{2x} + \frac{1}{2}\, l\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\,\text{arc sin}\, x\,.$$

APPLICATIONS.

1. $$y = \int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}}\, dx$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} + 3\, l\left(\sqrt[3]{x}+1\right) + x - \frac{3}{4}\, x\sqrt[3]{x}\,.$$

2. $$y = \int \frac{dx}{x\,(a+b\,x^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2\,a^{\frac{5}{2}}}\, l\,\frac{\sqrt{a+b\,x^2}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+b\,x^2}+\sqrt{a}}$$
$$+\frac{1}{a^2\sqrt{a+b\,x^2}} + \frac{1}{3\,a\sqrt{(a+b\,x^2)^3}}\,.$$

3. $$y = \int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(a+b\,x^2)^3}} = 2\,\frac{\left\{-8\,a^2-4\,a\,b\,x+b^2\,x^2\right\}}{3\,b^3\sqrt{a+b\,x^2}}\,.$$

4. $$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}} = l\left[1+2\,x+2\sqrt{1+x+x^2}\right].$$

5. $$y = \int \frac{dx}{x\sqrt{x+a}} = \frac{2}{\sqrt{a}}\,\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}\,.$$

6. $$y = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \text{arc sin}\,\frac{2\,x-1}{\sqrt{5}}\,.$$

7. $$y = \int \frac{x\, dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(b^2-x^2)}} = \text{arc sin}\sqrt{\frac{x^2-a^2}{b^2-a^2}}\,.$$

8. $y = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}\sqrt{b^2 - x^2}} = \frac{1}{ab} \text{arc sin} \frac{b}{x}\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{b^2 - a^2}}$.

9. $y = \int \frac{dx}{\sqrt{ax - bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \text{arc sin} \frac{2bx - a}{a}$.

10. $y = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = l\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$.

11. $y = \int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}} = l \frac{-1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$.

12. $y = \int \frac{dx}{(x + a)\sqrt{1 + x^2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{1 + x^2}} l \frac{x + \sqrt{1 + x^2} + a + \sqrt{1 + a^2}}{x + \sqrt{1 + x^2} + a - \sqrt{1 + a^2}}$.

13. $y = \int \frac{dx}{(x^2 - p^2)\sqrt{1 + x^2}}$

$= \frac{1}{2p\sqrt{1 + p^2}} l \frac{(x + \sqrt{1 + x^2})^2 - (p + \sqrt{1 + p^2})^2}{(x + \sqrt{1 + x^2})^2 - (p - \sqrt{1 + p^2})^2}$.

14. $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{1}{2} \text{arc sin} \frac{x^2}{a^2}$ . .

15. $x = \int \frac{x\,dx}{(1 + x^2)\sqrt{1 - x^4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 - x^2}{1 + x^2}}$.

16. $y = \int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{1 + x - x^2}} = \text{arc tg} \frac{3x + 1}{2\sqrt{1 + x - x^2}}$.

17. $y = \int \frac{x^2\,dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 + x^2}}$

$= \frac{1}{2} l \frac{(\sqrt{1 + x^2} - x)(\sqrt{1 + x^2} + x\sqrt{2})}{(\sqrt{1 + x^2} + x)(\sqrt{1 + x^2} - x\sqrt{2})}$.

18. $y = \int \frac{dx}{x}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}} = l\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + \text{arc sec}\,\frac{x}{a}$;

19. $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{-(c^2+\mu') + 2\,k\,x^2 - \mu\,x^4}}$

$= \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\,\text{arc cos}\,\frac{\mu\,x - k}{\sqrt{k^2 - \mu\,(c^2+\mu')}}$.

20. $y = \frac{e^{kx}\,dx}{\sqrt{a + b\,e^{kx}}} = \frac{2}{b\,k}\sqrt{a + be^{kx}}$.

21. $y = \int x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx = \frac{a^2}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{x}{a} - \left(a + \frac{x}{2}\right)\sqrt{a^2 - x^2}$.

22. $y = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\left(\frac{2\,(1 - x - \sqrt{2}\sqrt{1+x^2})}{-(1+x)}\right)$.

23. $y = \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1 - x - x^2}}$

$= l\,\frac{x + 3 - 2\sqrt{1 - x - x^2}}{1+x}$.

24. $y = \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2\,x - x^2}} = \text{arc cos}\,\frac{1-x}{\sqrt{2}}$.

25. $y = \int \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \frac{1}{2}\,\text{arc sin}\,x + (2+x)\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}$.

VII. — Intégration des fonctions trigonométriques.

1. $y = \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x} = \int \frac{\frac{\frac{1}{2}dx}{\cos^2\frac{1}{2}x}}{\text{tg}\,\frac{1}{2}x} = l\,\text{tg}\,\frac{1}{2}\,x$.

2. $y = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = - l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

$= l \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = l \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$

3. $y = \int \frac{dx}{\operatorname{tg} x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\sin x} = l \sin x.$

4. $y = \int \frac{dx}{\operatorname{cotg} x} = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos x} = - l \cos x.$

5. $y = \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \int \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{1}{2} x} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} x.$

6. $y = \int \frac{dx}{1 + e \cos x} = \int \frac{dx}{(1+e) \cos^2 \frac{1}{2} x + (1-e) \sin^2 \frac{1}{2} x}.$

$$= 2 \int \frac{\dfrac{\frac{1}{2} dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x}}{(1+e) + (1-e) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} x}.$$

En posant $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = z$, on a facilement :

$$y = 2 \int \frac{dz}{(1+e) + (1-e) z^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x\right].$$

7. $y = \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 x};$

En posant $a \operatorname{tg} x = b z$, il vient :

$$y = \frac{b}{a}\int \frac{dz}{b^2(1+z^2)} = \frac{1}{a b} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{a \operatorname{tg} x}{b}\right).$$

8. $$y = \int \frac{dx}{(1+e\cos x)^2} = \int \frac{dx}{\left[\left(1+e\right)\cos^2\frac{1}{2}x + \left(1-e\right)\sin^2\frac{1}{2}x\right]^2}.$$

En posant $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = z$, on a : $dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}$,

$$\cos^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{1+z^2}, \qquad \sin^2\frac{1}{2}x = \frac{z^2}{1+z^2},$$

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},$$

$$1 + e\cos x = \frac{1+e+(1-e)z^2}{1+z^2}.$$

Par conséquent,

$$y = 2\int \frac{(1+z^2)\,dz}{\left[(1+e)+(1-e)z^2\right]^2}.$$

Nous aurons donc :

$$y = \frac{2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{(1+e)+(1-e)\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x}\right]$$

$$= \frac{2}{(1-e)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right) - \frac{e}{1-e^2}\,\frac{\sin x}{1+e\cos x}.$$

9. $$y = \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x}.$$

Posons $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x = t$; d'où :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}, \quad \text{et nous aurons :}$$

$$y = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left[\frac{2\,a\,t}{1+t^2} + b\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]}$$

$$= 2\int \frac{dt}{2\,a\,t + b\,(1-t^2)}.$$

Mais on a :

$$\frac{1}{b + 2\,a\,t - b\,t^2} =$$

$$= \frac{-1}{b\left(t - \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)\left(t - \frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)}$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\left[\frac{1}{t - \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}} - \frac{1}{t - \frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{b}}\right].$$

Par conséquent :

$$y = -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dt}{t - \frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int \frac{dt}{t - \frac{a-\sqrt{a^2+b^2}}{b}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\, l\, \frac{b \operatorname{tg}\frac{1}{2}x - \left(a - \sqrt{a^2+b^2}\right)}{b \operatorname{tg}\frac{1}{2}x - \left(a + \sqrt{a^2+b^2}\right)}.$$

10. $y = \int \frac{dx}{\text{sin vers } x} = \int \frac{dx}{1-\cos x} = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}x.$

11. $y = \int \frac{dx}{a + b \cos x}$. Posons $\operatorname{tg} \frac{1}{2} x = t$, il vient :

$$y = \int \frac{2\,dt}{\left(1+t^2\right)\left[a + b\,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right]} = \int \frac{2\,dt}{a(1+t^2) + b(1-t^2)}$$

$$= 2\int \frac{d\,t}{a+b+(a-b)\,t^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(t\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right).$$

12. $y = \int \cos^5 x\,dx = \cos^4 x \sin x + 4\int \cos^3 x \sin^2 x\,dx$

$$= \cos^4 x \sin x + 4\int \cos^3 x\left(1 - \cos^2 x\right) dx$$

$$= \cos^4 x \sin x + 4\int \cos^3 x\,dx - 4\int \cos^5 x\,dx.$$

D'où :

$$5\int \cos^5 x\,dx = \cos^4 x \sin x + 4\int \cos^3 x\,dx.$$

Or,

$$\int \cos^3 x\,dx = \cos^2 x \sin x + 2\int \cos x \sin^2 x\,dx$$

$$= \cos^2 x \sin x + 2\int \cos x\left(1 - \cos^2 x\right) dx;$$

$$3\int \cos^3 x\,dx = \cos^2 x \sin x + 2\int \cos x\,dx$$

$$= \cos^2 x \sin x + 2 \sin x.$$

Par conséquent,

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\cos^2 x \sin x + 2 \sin x}{3},$$

et enfin :

$$y = \int \cos^5 x\, dx = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\left(\cos^2 x \sin x + 2\sin x\right).$$

13. $y = \int \cos^4 x\, dx = \cos^3 x \sin x + 3\int \cos^2 x \sin^2 x\, dx$

$$= \cos^3 x \sin x + 3\int \cos^2 x\left(1 - \cos^2 x\right) dx$$

$$= \cos^3 x \sin x + 3\int \cos^2 x\, dx - 3\int \cos^4 x\, dx\ ;$$

d'où :

$$4\int \cos^4 x\, dx = \cos^3 x \sin x + 3\int \cos^2 x\, dx\,.$$

Or,

$$\int \cos^2 x\, dx = \cos x \sin x + \int \sin^2 x\, dx$$

$$= \cos x \sin x + \int \left(1 - \cos^2 x\right) dx$$

$$= \cos x \sin x + \int dx - \int \cos^2 x\, dx\,.$$

Par conséquent,

$$2\int \cos^2 x\, dx = \cos x \sin x + x\,,$$

et

$$y = \int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4}\cos^3 x \sin x + \frac{3}{8}\left(\cos x \sin x + x\right).$$

14. $y = \int \operatorname{tg}^5 x\, dx$. En posant $\operatorname{tg} x = z$, on a :

$$x = \operatorname{arc\,tg} z\,, \quad dx = \frac{dz}{1 + z^2}\ ; \quad \text{d'où :}$$

$$y = \int \frac{z^5\, dz}{1 + z^2} = \int \left(z^3 - z + \frac{z}{1 + z^2}\right) dz$$

$$= \frac{z^4}{4} - \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2}\, l\left(1 + z^2\right),$$

$$y = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \frac{1}{2} l \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - l \cos x .$$

15. $y = \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{\cos x} \operatorname{tg} x - \int \frac{\operatorname{tg} x \sin x \, dx}{\cos^2 x}$

$$= \frac{1}{\cos x} \operatorname{tg} x - \int \frac{(1 - \cos^2 x) \, dx}{\cos^3 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x}.$$

Donc,

$$2 \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} + l \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

$$y = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

16. $y = \int \sin \left(a x + b\right) \cos \left(a' x + b'\right) d x .$

On a :

$$\sin \left(a x + b\right) \cos \left(a' x + b'\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sin \left\{ \left(a + a'\right) x + b + b' \right\} + \sin \left\{ \left(a - a'\right) x + b - b' \right\} \right];$$

d'où :

$$y = \frac{1}{2} \int \sin \left\{ \left(a + a'\right) x + b + b' \right\} dx$$

$$+ \frac{1}{2} \int \sin \left\{ \left(a - a'\right) x + b - b' \right\} dx$$

$$= - \frac{1}{2 (a + a')} \cos \left\{ \left(a + a'\right) x + b + b' \right\}$$

$$- \frac{1}{2 (a - a')} \cos \left\{ \left(a - a'\right) x + b - b' \right\}.$$

17. $y = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx}{\sin^2 x \cos^2 x},$

$$y = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg} x}.$$

Remarque. — On peut encore obtenir cette intégrale de la manière suivante :

$$y = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4\,dx}{\sin^2 2x} = -2 \operatorname{cotg} 2x$$

$$= -\frac{2}{\operatorname{tg} 2x} = \frac{\operatorname{tg}^2 x - 1}{\operatorname{tg} x}.$$

18. $$y = \int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x} = l \operatorname{tg} x.$$

19. $$y = \int \frac{\sin^3 x\, dx}{\cos^5 x} = \int \frac{\sin x\,(1 - \cos^2 x)\, dx}{\cos^5 x}$$

$$= \int \frac{\sin x\, dx}{\cos^5 x} - \int \frac{\sin x\, dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{4 \cos^4 x} - \frac{1}{2 \cos^2 x}.$$

20. $$y = \int \sin^3 x \cos^4 x\, dx = \int \sin^3 x \cos^3 x . \cos x\, dx$$

$$= \frac{\cos^3 x \sin^4 x}{4} + \frac{3}{4} \int \cos^2 x \sin^5 x\, dx.$$

Or,

$$\int \cos^2 x \sin^5 x\, dx = \int \cos^2 x \sin^3 x \left(1 - \cos^2 x\right) dx$$

$$= \int \cos^2 x \sin^3 x\, dx - \int \cos^4 x \sin^3 x\, dx;$$

d'où :

$$y = \int \sin^3 x \cos^4 x\, dx = \frac{\cos^3 x \sin^4 x}{4}$$

$$+ \frac{3}{4} \int \cos^2 x \sin^3 x\, dx - \frac{3}{4} \int \sin^3 x \cos^4 x\, dx,$$

$$\frac{7y}{4} = \frac{\cos^3 x \sin^4 x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx .$$

Mais

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \int \cos x . \sin^3 x \cos x \, dx$$

$$= \frac{\cos x \sin^4 x}{4} + \frac{1}{4}\int \sin^5 x \, dx$$

$$= \frac{\cos x \sin^4 x}{4} + \frac{1}{4}\int \sin^3 x \, dx - \frac{1}{4}\int \sin^3 x \cos^2 x \, d\,x ;$$

$$\frac{5}{4}\int \cos^2 x \sin^3 x \, dx = \frac{\cos x \sin^4 x}{4} + \frac{1}{4}\int \sin^3 x \, dx .$$

Donc,

$$7y = \cos^3 x \sin^4 x + \frac{3}{5}\cos x \sin^4 x + \frac{3}{5}\int \sin^3 x \, dx .$$

$$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x \, dx - \int \sin x \cos^2 x \, dx$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} .$$

Par suite,

$$7y = \cos^3 x \sin^4 x + \frac{3}{5}\cos x \sin^4 x + \frac{3}{5}\left(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3}\right)$$

$$y = \frac{\cos^3 x \sin^4 x}{7} + \frac{3}{35}\cos x \sin^4 x - \frac{3}{35}\cos x + \frac{1}{35}\cos^3 x .$$

21. $$y = \int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} = \int \frac{dx}{2(\cos^2 x + \sin^2 x) - \sin^2 x}$$

$$= \int \frac{dx}{2\cos^2 x + \sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{2 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right) .$$

Remarque. — On peut encore écrire :

$$y = \int \frac{dx}{2 - \sin^2 x} = \int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{2 + \operatorname{tg}^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}\right).$$

22. $y = \int \frac{\cos^2 x \sin x \, dx}{\sqrt{1 + e^2 \sin^2 x}}$. Posant $\cos x = z$, on a :

$$y = -\int \frac{z^2 \, dz}{\sqrt{1 + e^2 - e^2 z^2}},$$ et si l'on fait $e z = u\sqrt{1 + e^2}$,

d'où $dz = \frac{\sqrt{1 + e^2}}{e} du$, il vient :

$$y = -\frac{1 + e^2}{e^3} \int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$= -\frac{1 + e^2}{e^3} \left[-u\sqrt{1 - u^2} + \int du \sqrt{1 - u^2} \right]$$

$$= -\frac{1 + e^2}{e^3} \left[-u\sqrt{1 - u^2} + \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} - \int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{1 - u^2}} \right].$$

Par conséquent :

$$y = -\frac{1 + e^2}{e^3} \int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

$$= \frac{1 + e^2}{e^3} \left[u\sqrt{1 - u^2} + \operatorname{arc\,cos} u \right]$$

$$+ \frac{1 + e^2}{e^3} \int \frac{u^2 \, du}{\sqrt{1 - u^2}};$$

d'où :

$$2y = \frac{1 + e^2}{e^3} u\sqrt{1 - u^2} + \frac{1 + e^2}{e^3} \operatorname{arc\,cos} u,$$

$$y = \frac{1 + e^2}{2 e^3} u\sqrt{1 - u^2} + \frac{1 + e^2}{2 e^3} \operatorname{arc\,cos} u,$$

$$y = \frac{1+e^2}{2e^3}\frac{ez}{\sqrt{1+e^2}}\sqrt{1-\frac{e^2z^2}{1+e^2}}$$

$$+\frac{1+e^2}{2e^3}\text{arc cos }\frac{ez}{\sqrt{1+e^2}}$$

$$= \frac{z\sqrt{1+e^2-e^2z^2}}{2e^2} + \frac{1+e^2}{2e^3}\text{arc cos }\frac{ez}{\sqrt{1+e^2}}$$

$$= \frac{\cos x\sqrt{1+e^2\sin^2 x}}{2e^2} + \frac{1+e^2}{2e^3}\text{arc cos }\frac{e\cos x}{\sqrt{1+e^2}}.$$

23. $y = \int\frac{\cos x\,dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{1}{b}\int\frac{b\cos x\,dx}{(a+b\cos x)^2}$

$$= \frac{1}{b}\int\frac{dx}{a+b\cos x} - \frac{a}{b}\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^2}.$$

Or,

$$\int\frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{arc tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\text{tg}\frac{1}{2}x\right),$$

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{\left(1+\frac{b}{a}\cos x\right)^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(1+e\cos x)^2}, \quad \text{en posant } \frac{b}{a} = e.$$

Mais,

$$\int\frac{dx}{(1+e\cos x)^2} = \frac{2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\text{arc tg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\text{tg }\frac{1}{2}x\right)$$

$$-\frac{e}{1-e^2}\frac{\sin x}{1+e\cos x}.$$

Par conséquent,

$$\int\frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{2a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\text{arc tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\text{tg }\frac{1}{2}x\right)$$

$$-\frac{b}{a^2-b^2}\frac{\sin x}{a+b\cos x},$$

et enfin :

$$y = \frac{2}{b\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x\right)$$

$$- \frac{2\,a^2}{b\,(a^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x\right)$$

$$+ \frac{a}{a^2 - b^2} \frac{\sin x}{a + b \cos x}$$

$$= - \frac{2\,b}{\sqrt{(a^2 - b^2)^3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} x\right)$$

$$+ \frac{a}{a^2 - b^2} \frac{\sin x}{a + b \cos x} .$$

24. $$y = \int \frac{\sin x + \cos x + 1}{\sin x - \cos x + 1} dx = \int \frac{\sin x + 2 \cos^2 \frac{1}{2} x}{\sin x + 2 \sin^2 \frac{1}{2} x} dx$$

$$= \int \frac{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x + 2 \cos^2 \frac{1}{2} x}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x + 2 \sin^2 \frac{1}{2} x} dx$$

$$= \int \frac{\cos \frac{1}{2} x \left(\sin \frac{1}{2} x + \cos \frac{1}{2} x\right)}{\sin \frac{1}{2} x \left(\sin \frac{1}{2} x + \cos \frac{1}{2} x\right)} dx$$

$$= \int \frac{\cos \frac{1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} dx = 2\, l \sin \frac{1}{2} x .$$

APPLICATIONS.

1. $y = \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 \alpha x + b^2 \cos^2 \alpha x} = \frac{1}{\alpha a b} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{a \operatorname{tg} \alpha x}{b} \right).$

2. $y = \int \sin^3 x \, dx = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x$

$$= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x .$$

3. $y = \int \operatorname{tg}^4 x \, dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x .$

4. $y = \int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} l \operatorname{tg} \frac{1}{2} x .$

5. $y = \int \sin x \cos x \, dx = \frac{\sin^2 x}{2} .$

6. $y = \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \sin x \left\{ -\frac{\cos^5 x}{6} + \frac{\cos^3 x}{24} + \frac{\cos x}{16} \right\} + \frac{x}{16}.$

7. $y = \int \frac{dx}{(1 + e \cos \alpha x)^2} = \frac{1}{\alpha (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha x \right) \right]$

$$- \frac{e}{\alpha (1 - e^2)} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha x}{1 + e + (1 - e) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \alpha x} .$$

8. $y = \int \sin^4 x \, dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x .$

9. $y = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} + 2 \cos x - \frac{\cos^3 x}{3} .$

10. $y = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^5 x} = -\frac{1}{4 \operatorname{tg}^4 x} + \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + l \sin x .$

11 $y = \int \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \frac{(\arcsin x)^2}{4} - \frac{x \sqrt{1 - x^2}}{2} \arcsin x + \frac{x^2}{4}.$

12. $y = \int e^{\alpha x} \sin^2 x \, dx = \frac{e^{\alpha x} \sin x \, (\alpha \sin x - 2 \cos x)}{\alpha^2 + 4} + \frac{2 e^{\alpha x}}{\alpha(\alpha^2+4)}$.

VIII. — Différentielles binômes.

1. $y = \int x^2 \left(1 + x^4\right)^{\frac{1}{4}} dx$.

Posons $\frac{1}{x^4} + 1 = z^4$, d'où $x^4 = \frac{1}{z^4 - 1}$,

$x^3 \, dx = -\frac{z^3 \, dz}{(z^4 - 1)^2}$; il viendra :

$$y = \int x^3 \left(\frac{1}{x^4} + 1\right)^{\frac{1}{4}} dx = -\int \frac{z^4 \, dz}{(z^4 - 1)^2}$$

$$= -\int \frac{dz}{z^4 - 1} + \int \frac{dz}{(z^4 - 1)^2}.$$

Or,

$$\int \frac{dz}{z^4 - 1} = \frac{1}{4} l \frac{z - 1}{z + 1} - \frac{1}{2} \text{arc tg } z,$$

$$\int \frac{dz}{(z^4 - 1)^2} = -\frac{z}{4(z^4 - 1)} + \frac{3}{16} l \frac{z+1}{z-1} + \frac{3}{8} \text{arc tg } z.$$

Par suite,

$$y = \frac{1}{4} l \frac{z+1}{z-1} + \frac{1}{2} \text{arc tg } z - \frac{z}{4(z^4 - 1)} + \frac{3}{16} l \frac{z+1}{z-1}$$

$$+ \frac{3}{8} \text{arc tg } z = \frac{7}{16} l \frac{z+1}{z-1} + \frac{7}{8} \text{arc tg } z - \frac{z}{4(z^4 - 1)}$$

$$= \frac{7}{16} l \frac{\sqrt[4]{1 + x^4} + x}{\sqrt[4]{1 + x^4} - x} + \frac{7}{8} \text{arc tg } \frac{\sqrt[4]{1 + x^4}}{x} - \frac{\sqrt[4]{1 + x^4}}{4 x \frac{1}{x^4}}$$

$$= \frac{7}{16} l \frac{\sqrt[4]{1 + x^4} + x}{\sqrt[4]{1 + x^4} - x} + \frac{7}{8} \text{arc tg } \frac{\sqrt[4]{1 + x^4}}{x} - \frac{x^3 \sqrt[4]{1 + x^4}}{4}.$$

2. $y = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^{-3}}}$.

Posons $1 + x^{-3} = z^3$, d'où $dx = -\frac{z^2\,dz}{x^{-4}} = -z^3 x^4\,dz$;

$$y = -\int \frac{z^2 x^4\,dx}{x\,z} = -\int z\,x^3\,dx = -\int \frac{z\,dz}{z^3-1}$$
$$= -\int \frac{dz}{z^2+z+1} - \int \frac{dz}{z^3-1}.$$

Or, $\int \frac{dz}{z^3-1} = \frac{1}{3} l\left(z-1\right) - \frac{1}{6} l\left(z^2+z+1\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}}$

$$= \frac{1}{6} l \frac{(z-1)^2}{z^2+z+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}}.$$

Par conséquent,

$$y = -\frac{2}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6} l \frac{(z-1)^2}{z^2+z+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{2z+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{6} l \frac{(z-1)^2}{z^2+z+1}.$$

3. $y = \int x^4 \left(a + b\,x^3\right)^{\frac{1}{3}} dx$. Posons $a\,x^{-3} + b = z^3$,

d'où $dx = -\frac{z^2\,dz}{a}\left(\frac{a}{z^3-b}\right)^{\frac{4}{3}}$; nous aurons :

$$y = \int x^5 \left(a\,x^{-3}+b\right)^{\frac{1}{3}} dx = -\int \left(\frac{a}{z^3-b}\right)^3 \frac{z^3\,dz}{a}$$
$$= -a^2 \int \frac{z^3\,dz}{(z^3-b)^3} = -a^2 \int \frac{dz}{(z^3-b)^2} - a^2\,b \int \frac{dz}{(z^3-b)^3}.$$

En posant $b = c^3$, on a :

$$\frac{1}{(z^3-b)^3} = \frac{1}{(z^3-c^3)^3} = \frac{1}{(z-c)^3\,(z^2+cz+c^2)^3};$$

si l'on décompose cette fraction en fractions simples, on écrira :

$$\frac{1}{(z^3 - c^3)^3} = \frac{A}{(z-c)^3} + \frac{B}{(z-c)^2} + \frac{C}{z-c}$$

$$+ \frac{Mz + N}{(z^2 + cz + c^2)^3} + \frac{Pz + Q}{(z^2 + cz + c^2)^2} + \frac{Rz + S}{z^2 + cz + c^2},$$

et l'on déterminera les coëfficients A, B, C, M, N, P, Q, R, S.

IX. — Intégrales définies.

1. $y = \int_0^1 x^m \, dx = \frac{1}{m+1}$.

2. $y = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a}$.

3. $y = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}$.

4. $y = \int_0^1 \frac{1 - x^m}{1 - x} \, dx = \int_0^1 \left(1 + x + x^2 + \ldots . + x^{m-1}\right) dx$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\ldots + \frac{1}{m}.$$

5. $y = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 2x + 4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\text{arc tg} \frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)_0^1$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\text{arc tg } 0 - \text{arc tg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{arc tg} \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

6. $y = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 2x + 4} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\text{arc tg} \, \infty - \text{arc tg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{2} + \text{arc tg} \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

7. $y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2}\left[e^x \left(\sin x - \cos x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} + 1\right).$

8. $y = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2}\left[\text{arc tg}\, x + \frac{x}{1+x^2}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$

Remarque. — Pour $x = \infty$, $\lim \frac{x}{1+x^2} = \lim \frac{1}{2x} = 0$.

9. $y = \int_0^1 \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}} = 2\left(\text{arc tg}\sqrt{2} - \text{arc tg}\, 1\right)$

$= 2\,\text{arc tg}\sqrt{2} - \frac{\pi}{2}.$

10. $y = \int_0^1 \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x}} = \frac{3\pi}{4}.$

11. $y = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

12. $y = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} = \left[\text{arc tg}\left(\frac{3x+1}{2\sqrt{1+x-x^2}}\right)\right]_0^1$

$= \text{arc tg}\,(2) - \text{arc tg}\,\frac{1}{2} = \text{arc tg}\,\frac{2-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\cdot 2} = \text{arc tg}\,\frac{3}{4}.$

13. $y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1+e\cos x)^2} = \frac{2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} - \frac{e}{1-e^2}.$

14. $y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

15. $y = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + e \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - e^2}}$.

APPLICATIONS.

1. $y = \int_0^1 x\, e^x\, dx = \left[e^x \left(x - 1\right)\right]_0^1 = 1$.

2. $y = \int_0^1 \text{arc sin}\, x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$.

3 $y = \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{1 + x^2} = 1 - \frac{\pi}{4}$.

4. $y = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = l\left(a + \sqrt{1 + a^2}\right)$.

5. $y = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a\,x - x^2}} = \pi$.

6. $y = \int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{4}$.

7. $y = \int_0^1 \frac{x^3\, dx}{\sqrt{1 - x}} = \frac{32}{35}$.

8. $y = \int_0^1 \frac{dx}{(1 + x)\sqrt{1 - x^2}} = 1$.

9. $y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + e \cos x} = \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \text{arc tg} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}$.

10. $y = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1 + e \cos x)^2} = \frac{\pi}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}$.

11. $y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2 - \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ arc tg } \frac{1}{\sqrt{2}}.$

12. $y = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\alpha^2 + \beta^2 x^2} = \frac{\pi}{2\alpha\beta}.$

13. $y = \int_0^{\infty} x\, e^{-ax} \cos b x\, dx = \frac{a}{a^2 + b^2}.$

X. — Quadrature des courbes planes.

1. L'équation du cercle étant :

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

on a :

$$\int y\, dx = \int \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \arcsin \frac{x}{R}\right] + C.$$

L'aire comprise entre deux ordonnées correspondant aux abscisses x_0 et x_1, aura pour expression :

$$A = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \text{ arc sin } \frac{x}{R}\right]_{x_0}^{x_1}.$$

Si l'on suppose $x_0 = 0$, on a, pour $x_1 = x$:

$$A = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{R^2 - x^2} + R^2 \text{ arc sin } \frac{x}{R}\right].$$

L'aire du quart de cercle s'obtient en faisant $x = R$:

$A' = \frac{\pi R^2}{4}$; d'où l'aire totale $= \pi R^2$.

2. L'hyperbole rapportée à ses axes a pour équation :

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

On aura :

$$\int y\,dx = \frac{b}{a}\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx\,.$$

Or,

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \int \sqrt{1 - a^2 x^{-2}}\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\sqrt{1 - a^2 x^{-2}}$$

$$-\frac{1}{2}\int x^2 \frac{a^2 x^{-3}}{\sqrt{1 - a^2 x^{-2}}}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \frac{x\sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\,l\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C\,.$$

On a donc pour l'aire comprise entre deux ordonnées quelconques :

$$A = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{2a}\left\{x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\,l\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right\}_{x_0}^{x_1}.$$

Si l'aire commence au sommet, on fera $x_0 = a$, et l'on aura :

$$A = \frac{b}{a}\int_a^x \sqrt{x^2 - a^2}\,dx = \frac{b\,x\sqrt{x^2 - a^2}}{2\,a} - \frac{a\,b}{2}\,l\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right).$$

3. L'équation différentielle de la cycloïde rapportée à son origine étant :

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2\,a\,y - y^2}}\,,$$

on a :

$$\int y\,dx = \int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{2\,a\,y - y^2}}.$$ On intègre cette expression

en posant $y - a = a\,z$, ce qui nous donnera facilement :

$$\int y\,dx = a^2\left[\frac{3}{2}\arcsin\frac{y-a}{a} - \frac{2}{a}\sqrt{2ay - y^2} - \frac{y-a}{2a^2}\sqrt{2ay - y^2}\right] + C.$$

On obtiendra l'aire comprise entre l'origine de la cou et son sommet, en intégrant entre les limites $y = 0$ et $y =$ a, ce qui nous donne :

$$A = \int_0^{2a} y\, dx = a^2 \left[\frac{3}{2} \text{arc sin}\,(1) - \frac{3}{2} \text{arc sin}\left(-1\right) \right]$$

$$= \frac{3\pi a^2}{2}.$$

Remarque. — On peut encore intégrer l'expression :

$$\int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{2\, a\, y - y^2}} = \int \frac{y^2\, dy}{\sqrt{a^2 - (y - a)^2}},$$

en posant $y - a = a \sin z$, ce qui nous donne :

$$a^2 \int \left(1 + 2 \sin z + \sin^2 z\right) dz$$

$$= a^2 \left[z - 2 \cos z - \frac{\sin z \cos z}{2} + \frac{z}{2} \right] + C.$$

Pour trouver les limites de z, faisons $y = 0$, et $y = 2\,a$ dans l'équation $y - a = a \sin z$, et nous aurons :

pour $y = 0$, $\sin z = -1$, ou bien $z = -\frac{\pi}{2}$,

pour $y = 2\,a$, $\sin z = 1$, ou bien $z = \frac{\pi}{2}$.

Par conséquent :

$$A = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \sin z + \sin^2 z\right) dz = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

4. L'équation de la cissoïde étant :

$$\left(2\,a - x\right) y^2 = x^3, \quad \text{ou bien} \quad y = \pm x \sqrt{\frac{x}{2\,a - x}},$$

on a, en ne considérant que la partie au-dessus de l'axe des abscisses :

$$\int y\,dx = \int x\,dx\sqrt{\frac{x}{2a-x}} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-(a-x)^2}}$$

$$= \frac{3a^2}{2}\arc\cos\frac{a-x}{a} - \frac{(3a+x)}{2}\sqrt{2ax-x^2} + C.$$

Si l'aire commence à l'origine, on intègre entre les limites $x=0$, et $x=x$, et il vient :

$$A = \int_0^x y\,dx = \int_0^x x\,dx\sqrt{\frac{x}{2a-x}} = \frac{3a^2}{2}\arc\cos\frac{a-x}{a}$$

$$- \frac{3a+x}{2}\sqrt{2ax-x^2}.$$

En faisant $x = 2a$, on a pour l'aire comprise au-dessus de l'axe des abscisses entre la courbe et son asymptote :

$$A = \frac{3\pi a^2}{2}.$$

L'aire totale $= 3\pi a^2$. Donc, l'aire comprise entre la courbe et son asymptote est égale à trois fois l'aire du cercle générateur.

5. L'aire de la courbe

$$a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2),$$

laquelle a la forme (fig. 1), est donnée par la formule :

$$A = \int y\,dx = \frac{1}{a}\int x\,dx\sqrt{a^2-x^2}.$$

Or,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,x\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

On a donc pour l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et une ordonnée quelconque du côté positif :

$$A = \frac{1}{a}\int_0^x x\,dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{3a}\left[a^3 - \left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{a^2}{3}\left[1 - \frac{y^3}{x^3}\right].$$

L'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses au-dessus de l'axe dès x et du côté positif est donc :

$$A = \frac{1}{a}\int_0^x x\,dx\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{1}{3}a^2 .$$

L'aire totale située à la droite de l'axe des y est :

$$A' = 2\,A = \frac{2}{3}a^2 .$$

Enfin, on a pour l'aire totale de la courbe :

$$A'' = 2\,A' = \frac{4}{3}a^2 .$$

6. Soit la courbe (fig. 2) représentée par l'équation :

$$y^2 = x^2\,\frac{a - x}{a + x},$$

ou bien $y = \pm x\sqrt{\dfrac{a - x}{a + x}}$.

Construction de la courbe. — L'équation est vérifiée pour $x = 0$, $y = 0$; donc, la courbe passe par l'origine. Pour $x = a$, on a $y = 0$; donc, la courbe passe par le point A.

Depuis $x = 0$, jusque $x = a$, à chaque valeur de x correspondent deux valeurs de y, égales et de signes contraires : la courbe a donc la forme indiquée (fig. 2) du côté des abscisses positives.

Pour $x > a$, y est imaginaire; donc il n'y a aucun point de la courbe à la droite du point A.

Pour trouver la forme de la courbe à la gauche de l'axe des y, faisons $x = -x'$, nous aurons :

$$y = \mp x'\sqrt{\frac{a + x'}{a - x'}} .$$

Pour $x' < a$ y est réel, et à chaque valeur de x' correspondent deux valeurs de y égales et de signes contraires; pour

$x' = a$, c'est-à-dire pour $x = -a$, on a $y = \infty$: la droite $x = -a$ est donc une *asymptote*. Pour $x' > a$, y est imaginaire.

Cherchons l'aire OMANO. Nous avons :

$$\int y\,dx = \int x\,dx \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Or, en posant $a - x = (a+x)\theta^2$, on a :

$$x = \frac{a(1-\theta^2)}{1+\theta^2}, \quad dx = -\frac{4a\theta\,d\theta}{(1+\theta^2)^2}, \text{ d'où :}$$

$$\int y\,dx = -4a^2 \int \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2} \frac{\theta^2\,d\theta}{(1+\theta^2)^2} = -4a^2 \int \frac{\theta^2(1-\theta^2)\,d\theta}{(1+\theta^2)^3}$$

$$= -4a^2 \int \frac{1-\theta^4}{(1+\theta^2)^3}\,d\theta + 4a^2 \int \frac{d\theta}{(1+\theta^2)^3} - 4a^2 \int \frac{\theta^2\,d\theta}{(1+\theta^2)^3}$$

$$= -4a^2 \int \frac{d\theta}{(1+\theta^2)^2} + 4a^2 \int \frac{\theta^2\,d\theta}{(1+\theta^2)^2} + 4a^2 \int \frac{d\theta}{(1+\theta^2)^3}$$

$$- 4a^2 \int \frac{\theta^2\,d\theta}{(1+\theta^2)^3}.$$

Or,

$$\int \frac{d\theta}{(1+\theta^2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \theta + \frac{\theta}{2(1+\theta^2)};$$

$$\int \frac{\theta^2\,d\theta}{(1+\theta^2)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \theta - \frac{\theta}{2(1+\theta^2)};$$

$$\int \frac{\theta^2\,d\theta}{(1+\theta^2)^3} = -\frac{\theta}{4(1+\theta^2)^2} + \frac{\theta}{8(1+\theta^2)} + \frac{1}{8} \operatorname{arc\,tg} \theta,$$

$$\int \frac{d\theta}{(1+\theta^2)^3} = -\frac{\theta}{4(1+\theta^2)^2} + \frac{3}{8} \operatorname{arc\,tg} \theta + \frac{1}{8} \frac{\theta}{1+\theta^2}.$$

En substituant, il vient :

$$\int y\,dx = -4a^2 \left(\frac{\theta}{1+\theta^2} - \frac{1}{4} \operatorname{arc\,tg} \theta \right).$$

Pour obtenir l'aire cherchée OMANO, il faut intégrer entre les limites $x=0$, et $x=a$; or, à cause de la relation

$$a - x = (a+x)\theta^2, \quad \text{on a :}$$

pour $x=0$, $\theta=1$, et pour $x=a$, $\theta=0$; donc,

$$A = \int_0^a y\,dx = -4a^2\left(\frac{\theta}{1+\theta^2} - \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\theta\right)_1^0$$

$$= 4a^2\left(\frac{\theta}{1+\theta^2} - \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\theta\right)_0^1 = 4a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{16}\right)$$

$$= \frac{a^2}{4}\left(8-\pi\right) = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{4}.$$

7. Trouver l'aire comprise entre l'épicycloïde et les axes des y et des x.

Les coordonnées d'un point M de la courbe sont exprimées par les équations :

$$x = \left(R+R'\right)\cos\alpha - R'\cos\frac{R+R'}{R'}\alpha,$$

$$y = \left(R+R'\right)\sin\alpha - R'\sin\frac{R+R'}{R'}\alpha.$$

L'aire comprise entre deux rayons vecteurs faisant les angles α_1 et α_2 avec l'axe des x, est donnée par la formule :

$$A = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x\,d\,y$$

$$= \left(R+R'\right)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\left(R+R'\right)\cos\alpha - R'\cos\frac{R+R'}{R'}\alpha\right]\left(\cos\alpha - \cos\frac{R+R'}{R'}\alpha\right)d\alpha.$$

$$= \left(R+R'\right)^2\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos^2\alpha\,d\,\alpha$$

$$- \left(R+R'\right)^2\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\cos\alpha\cos\frac{R+R'}{R'}\alpha\,d\,\alpha.$$

$$- R'\left(R + R'\right)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos\alpha \cos\frac{R+R'}{R'}\alpha\, d\alpha$$

$$+ R'\left(R + R'\right)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^2\frac{R+R'}{R'}\alpha\, d\alpha$$

$$= \left(R + R'\right)^2\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^2\alpha\, d\alpha$$

$$- \left(R + R'\right)\left(R + 2R'\right)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos\alpha \cos\frac{R+R'}{R'}\alpha\, d\alpha$$

$$+ R'\left(R + R'\right)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos^2\frac{R+R'}{R'}\alpha\, d\alpha$$

$$= \frac{(R+R')^2}{2}\Big\{\cos\alpha\sin\alpha + \alpha\Big\}_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$+ \frac{R'^2(R+R')}{2(R+R')}\Big\{\cos\frac{R+R'}{R'}\alpha\sin\frac{R+R'}{R'}\alpha + \frac{R+R'}{R'}\alpha\Big\}_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$- \frac{(R+R')(R+2R')}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(\cos\frac{R+2R'}{R'}\alpha + \cos\frac{R}{R'}\alpha\right) d\alpha$$

$$= \Big[\frac{(R+R')^2}{4}\sin 2\alpha + \frac{(R+R')^2}{2} + \frac{R'^2}{4}\sin 2\frac{R+R'}{R'}\alpha$$

$$+ \frac{R'(R+R')}{2}\alpha - \frac{(R+R')R'}{2}\sin\frac{R+2R'}{R'}\alpha$$

$$- \frac{(R+R')(R+2R')R'}{R}\sin\frac{R}{R'}\alpha\Big]_{\alpha_1}^{\alpha_2}$$

$$= \left(R+R'\right)\left[\begin{array}{l}\frac{(R+R')}{4}\sin 2\alpha + \frac{R+2R'}{2}\alpha + \frac{R'^2}{4(R+R')}\sin^2\frac{R+R'}{R'}\alpha \\ -\frac{R'}{2}\sin\frac{R+2R'}{R'}\alpha - \frac{(R+2R')R'}{R}\sin\frac{R}{R'}\alpha\end{array}\right]_{\alpha_1}^{\alpha_2}.$$

Si l'on compte l'aire à partir de l'axe des x, on fera $\alpha_1 = 0$, et il viendra en écrivant α au lieu de α_2 :

$$A' = \left(R+R'\right)\left[\begin{array}{l} \frac{(R+R')}{4}\sin 2\alpha + \frac{R+2R'}{2}\alpha + \frac{R'^2}{4(R+R')}\sin 2\frac{R+R'}{R'}\alpha \\ -\frac{R'}{2}\sin\frac{R+2R'}{R'}\alpha - \frac{(R+2R')R'}{R}\sin\frac{R}{R'}\alpha \end{array}\right].$$

Si l'on suppose $R' = R$, on a alors la *cardioïde*, et l'aire comprise à partir de l'axe des x et un rayon correspondant à l'angle α, est donnée par la formule :

$$A'' = R^2\left[\sin 2\alpha + 3\alpha + \frac{1}{4}\sin 4\alpha - \sin 3\alpha - 3\sin\alpha\right].$$

Pour avoir l'aire comprise entre les axes des x et des y, il faudra faire : $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne pour la cardioïde :

$$A = R^2\left(\frac{3\pi}{2} - 2\right).$$

L'aire comprise depuis $\alpha_1 = 0$, jusque $\alpha_2 = \pi$, est :

$$A = 3\pi R^2,$$

et l'aire totale $= 6\pi R^2$.

8. Trouver l'aire totale comprise entre la courbe (fig. 3) :

$$y^2(x^2 + a^2) = a^2 x^2,$$

et ses asymptotes.

On a : $$y^2 = \frac{a^2 x^2}{a^2 + x^2};$$

les asymptotes sont deux parallèles à l'axe des x, ayant pour équations : $y = \pm a$.

L'aire comprise dans l'angle $y0x$ est donnée par la formule :

$$A = \int_0^\infty \left(a - y\right) dx.$$

Or, $$\int y\, dx = \int \frac{a\, x\, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = a\sqrt{a^2 + x^2}.$$

Par conséquent :

$$A = \int_0^{\infty} \left(a - y\right) dx = \left(a\,x - a\sqrt{a^2 + x^2}\right)_0^{\infty} = a\left(x - \sqrt{a^2 + x^2}\right)_0^{\infty}.$$

Or, $\lim \left(x - \sqrt{a^2 + x^2}\right) = \lim \dfrac{-a^2}{x + \sqrt{a^2 + x^2}} = 0$,

pour $x = \infty$.

Donc, $\qquad A = a^2$.

L'aire totale $= 4\,A = 4\,a^2$.

9. Trouver l'aire de la logarithmique :

$$y = b\,e^{\frac{x}{a}}.$$

On a :

$$A = \int_0^x y\,dx = b\int_0^x e^{\frac{x}{a}}\,dx = a\,b\left(e^{\frac{x}{a}} - 1\right),$$

pour l'aire comprise entre l'axe des y et une ordonnée quelconque.

L'aire comprise entre l'axe des y et $x = -\infty$ est :

$$A' = a\,b.$$

10. Trouver l'aire comprise entre une parabole, sa développée et le rayon de courbure.

L'équation de la parabole étant :

$$y^2 = 2\,p\,x,$$

on a (fig. 4) :

$$\text{Aire AMP} = \int_0^x y\,dx = \sqrt{2\,p}\int_0^x \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{2\,p}\,x^{\frac{3}{2}}.$$

On a aussi, en désignant par α et β les coordonnées du centre de courbure :

$$\text{Aire A}m\text{P}' = \int \beta\,d\,\alpha.$$

Les équations qui donnent α et β étant :

$$\left.\begin{aligned} x-\alpha+(y-\beta)\,y'=0\,, \\ 1+y'^2+(y-\beta)\,y''=0\,, \end{aligned}\right\}$$

on a, en vertu de l'équation de la parabole :

$$\left.\begin{aligned} y^2=2\,p\,x\,, \\ y\,y'=p\,, \\ y'^2+y\,y''=0\,; \end{aligned}\right\} \text{d'où} : y'=\frac{p}{y}\,, \qquad y''=-\frac{y'^2}{y}=-\frac{p^2}{y^3}\,.$$

Par suite, il vient :

$$1+\frac{\beta\,p^2}{y^3}=0\,,$$

$$x=\alpha+\frac{p\,\beta}{y}-p=\alpha-\frac{y^2}{p}-p=\alpha-2\,x-p\,,$$

ou bien : $\quad 3\,x=\alpha-p\,.$

En substituant y et x en fonction de α et β, dans :

$$y^2=2\,p\,x\,,$$

il vient :

$$\beta^{\frac{2}{3}}\,p^{\frac{4}{3}}=2\,p\,\frac{\alpha-p}{3}\,;$$

d'où :

$$\beta=\frac{2}{3}\left(\alpha-p\right)\sqrt{\frac{2\,(\alpha-p)}{3\,p}}\,.$$

Par conséquent :

$$\int\beta\,d\,\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3\,p}}\int\left(a-p\right)^{\frac{3}{2}}d\,\alpha=\frac{4}{15}\sqrt{\frac{2}{3\,p}}\left(\alpha-p\right)^{\frac{5}{2}}+\mathrm{C}\,;$$

et, en fonction de x, on a :

$$\int\beta\,d\,\alpha=\frac{4}{15}\sqrt{\frac{2}{3\,p}}\,3^{\frac{5}{2}}\,x^{\frac{5}{2}}+\mathrm{C}\,.$$

En intégrant entre les limites $x=0$, et $x=x$, il vient :

$$\int\beta\,d\,\alpha=\text{aire AmP}'=\frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{p}}\,x^{\frac{5}{2}}\,.$$

On a aussi :

$$\text{Aire MNP} = \frac{\text{M P. P N}}{2};$$

mais, $\text{P N} = S_n = y\frac{dy}{dx} = y\frac{p}{y} = p,$

donc :

$$\text{Aire MNP} = \frac{p\,y}{2} = \frac{p\sqrt{2\,p\,x}}{2} = \frac{p^{\frac{3}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}.$$

De même,

$$\text{Aire } m\text{P'N} = \frac{m\,\text{P'. N P'}}{2} = \frac{\beta}{2}\,\text{NP'}.$$

$$\text{N P'} = \text{A P'} - \text{A N} = \alpha - \text{A P} - \text{P N} = \alpha - x - p = 2\,x.$$

Donc :

$$\text{Aire } m\text{P'N} = \frac{\beta\,(2\,x - p)}{2} = \frac{y^3}{2\,p^2}\,2\,x = \frac{2\,p\,x\sqrt{2\,p\,x}}{2\,p^2}\,2\,x$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p}}\,x^{\frac{5}{2}}.$$

Enfin, on obtient pour l'aire cherchée :

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{2\,p}\,x^{\frac{3}{2}} + \frac{p^{\frac{3}{2}}\,x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} + \frac{12}{5}\sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{p}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p}}\,x^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\,p}}\left[\frac{4}{3}\,p\,x + p^2 + \frac{24}{5}\,x^2 - 4\,x^2\right]$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\,p}}\left(\frac{4}{3}\,p\,x + p^2 + \frac{4}{5}\,x^2\right).$$

11. Aire de la *cardioïde*. Cette courbe a pour équation polaire :

$$u = 2\,a\,(1 + \cos\omega) = 4\,a\cos^2\frac{1}{2}\,\omega.$$

Par conséquent, l'aire comprise entre la courbe, un rayon vecteur quelconque et l'axe polaire est :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\omega u^2\, d\,\omega = \frac{1}{2}\int_0^\omega 4\,a^2\left(1+\cos\omega\right)^2 d\omega = 2a^2\int_0^\omega\left(1+\cos\omega\right)^2 d\omega$$

$$= 2\,a^2\int_0^\omega\left(1 + \cos^2\omega + 2\cos\omega\right)d\,\omega$$

$$= 2\,a^2\left(\omega + 2\sin\omega + \frac{1}{2}\sin\omega\cos\omega + \frac{\omega}{2}\right)$$

$$= a^2\left(3\,\omega + 4\sin\omega + \sin\omega\cos\omega\right).$$

En intégrant de 0 à $2\,\pi$, on aurait l'aire totale :

$$A' = 6\,\pi\,a^2\,.$$

12. Trouver l'aire comprise (fig. 5) entre les deux demi-cercles Oma et OMA, et l'axe OaA :

Soit $OA = A$, $Oa = a$, les diamètres des deux cercles. Menons un rayon quelconque OmM, et nous aurons :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(u'^2 - u^2\right)d\,\omega\,.$$

Or, $\quad u' = OM = OA\cos\omega\,,\qquad u = Om = Oa\cos\omega\,;$
donc :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(A^2\cos^2\omega - a^2\cos^2\omega\right)d\,\omega = \frac{A^2-a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\omega\,d\,\omega\,;$$

d'où :

$$A = \frac{\pi\,(A^2 - a^2)}{8}\,.$$

On arrive au même résultat en partant de la formule :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{a\cos\omega}^{A\cos\omega} u\,du\,d\,\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\,\omega\int_{a\cos\omega}^{A\cos\omega} u\,du = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(A^2 - a^2\right)\cos^2\omega\,d\omega,$$

dans laquelle $u\,du\,d\,\omega$ désigne l'aire élémentaire.

13. Le lieu des projections du centre d'une ellipse sur les normales a pour équation :

$$u = \frac{(a^2 - b^2)\sin\omega\cos\omega}{\sqrt{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}}.$$

L'aire de cette courbe est :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\omega} u^2\, d\,\omega = \frac{(a^2 - b^2)^2}{2}\int_0^{\omega} \frac{\sin^2\omega\cos^2\omega}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}\, d\,\omega.$$

Or,

$$\frac{(a^2 - b^2)^2\sin^2\omega\cos^2\omega}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega} = \frac{(a^4 + b^4 - 2\,a^2b^2)\sin^2\omega\cos^2\omega}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}$$

$$= \left(a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega\right) - \frac{a^2b^2(\cos^4\omega + \sin^4\omega)}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}$$

$$- \frac{2\,a^2b^2\sin^2\omega\cos^2\omega}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}$$

$$= a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega - \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}.$$

Par conséquent :

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\omega}\left(a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega\right)d\,\omega - \frac{a^2b^2}{2}\int_0^{\omega}\frac{d\,\omega}{a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{4}\,\omega + \frac{a^2 - b^2}{4}\sin\omega\cos\omega - \frac{a\,b}{2}\,\text{arc tg}\left(\frac{a}{b}\,\text{tg}\,\omega\right)$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{4}\,\omega + \frac{a^2 - b^2}{8}\sin 2\,\omega - \frac{a\,b}{2}\,\text{arc tg}\left(\frac{a}{b}\,\text{tg}\,\omega\right).$$

Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, on a la quatrième partie de l'aire totale de la courbe :

$$A' = \frac{a^2 + b^2}{4}\,\frac{\pi}{2} - \frac{a\,b}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}\left(a - b\right)^2.$$

L'aire totale sera :

$$A'' = 4\,A' = \frac{\pi}{2}\left(a - b\right)^2 .$$

APPLICATIONS.

1. L'équation générale des hyperboles rapportées à leurs asymptotes étant :

$$x^m\, y^n = a^{m+n},$$

l'aire est donnée par la formule :

$$A = \frac{n}{n - m}\, a^{\frac{m+n}{n}}\, x^{\frac{n-m}{n}}$$

2. L'équation de la tractrice étant :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

l'aire comprise entre la partie positive des axes est :

$$A = -\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} - \frac{a^2}{2}\,\text{arc sin}\,\frac{y}{a} .$$

L'aire totale $= \dfrac{\pi\, a^2}{4}$.

3. L'aire totale comprise par la courbe :

$$a\, y^2 = x^2 \sqrt{a^2 - x^2},$$

est égale à $\dfrac{8}{5}\, a^2$.

4. L'aire de la courbe :

$$y = b\sqrt{\frac{x}{2\,a - x}},$$

comprise entre la courbe et une ordonnée quelconque (au-dessus de l'axe des abscisses et à partir de l'origine) est :

$$A = a\, b\left\{\text{arc cos}\,\frac{a - x}{a} - \frac{1}{x}\sqrt{2\,a\,x - x^2}\right\} .$$

L'aire comprise entre la courbe et son asymptote au-dessus de l'axe des abscisses sera :

$$A = \pi a b ,$$

et l'aire totale $= 2 \pi a b$.

5. L'aire comprise par la courbe :

$$x^2 y^2 = b^2 (x^2 - a^2) ,$$

depuis le sommet de la courbe ($x = a$), jusqu'à l'abscisse x est :

$$A = b \sqrt{x^2 - a^2} - a b \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} = x y - a b \operatorname{arctg} \frac{x y}{a b} .$$

6. L'aire de la chaînette :

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right) ,$$

est donnée par la formule :

$$A = c \sqrt{y^2 - c^2} .$$

7. L'aire comprise entre la logarithmique :

$$y = a e^{-\frac{x}{a}} ,$$

et les parties positives des axes, a pour limite la quantité finie a^2 .

8. L'aire de la lemniscade de Bernoulli :

$$u^2 = a^2 \cos 2 \omega ,$$

comptée à partir de l'axe polaire jusqu'à un rayon vecteur quelconque est :

$$A = \frac{a^2}{4} \sin 2 \omega .$$

L'aire totale a pour valeur a^2 : c'est donc le carré du demi-axe a de la courbe.

9. L'aire de la podaire de l'ellipse :

$$u^2 = a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega ,$$

comprise entre l'axe et un rayon vecteur quelconque est :

$$A = \frac{a^2 - b^2}{8} \sin 2\omega + \frac{a^2 + b^2}{4} \omega .$$

Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, on a le quart de l'aire $= \frac{a^2 + b^2}{8} \pi$.

L'aire totale $= \frac{a^2 + b^2}{2} \pi$. Elle est égale à l'aire d'un cercle de rayon $= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Remarque. — En désignant par S_1, S_2, S_3, les trois secteurs de l'ellipse, de la podaire de l'ellipse et du lieu des projections du centre sur les normales, on a :

$$S_3 = S_2 - S_1 .$$

XI. — Rectification des courbes.

1. Trouver la longueur de la cissoïde.

De l'équation :

$$y = x \sqrt{\frac{x}{2a - x}},$$

on tire :

$$dy = \frac{(3a - x)\sqrt{x}}{(2a - x)\sqrt{2a - x}} dx .$$

Par conséquent,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{a^2 (8a - 3x)}{(2a - x)^3} dx^2 ;$$

d'où : $$S = a \int_0^x \sqrt{\frac{8a - 3x}{2a - x}} \frac{dx}{2a - x} .$$

Pour intégrer cette expression, posons :

$$\frac{8a - 3x}{2a - x} = z^2 ,$$

ou bien : $\quad 8a - 3x = (2a - x) z^2 .$

On en déduit :

$$\frac{dx}{2a - x} = \frac{2z\,dz}{z^2 - 3} .$$

Quant aux limites de z, on voit que :

1° pour $x = 0$, $\quad z = 2$;

2° pour $x = x$, $\quad z = \sqrt{\frac{8a - 3x}{2a - x}}$.

Par conséquent :

$$S = 2a \int_2^{\sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}}} \frac{z^2\,dz}{z^2 - 3} = 2a\left[z + 3\int_2^{\sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}}} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 3}}\right]$$

$$= 2a\left[z - \frac{\sqrt{3}}{2}\, l\, \frac{z + \sqrt{3}}{z - \sqrt{3}}\right]_2^{\sqrt{\frac{8a-3x}{2a-x}}}$$

$$= 2a\left[\sqrt{\frac{8a - 3x}{2a - x}} - 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\, l\, \frac{\sqrt{8a-3x} + \sqrt{3}\sqrt{2a-x}}{\sqrt{8a-3x} - \sqrt{3}\sqrt{2a-x}} \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{2}\, l\, \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}\right]$$

$$= 2a\left[\sqrt{\frac{8a - 3x}{2a - x}} - 2 - \sqrt{3}\, l\, \frac{\sqrt{8a-3x} + \sqrt{3}\sqrt{2a-x}}{(2 + \sqrt{3})\sqrt{2a}}\right].$$

2. Trouver la longueur de la courbe :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} .$$

On a :

$$x^{-\frac{1}{3}}\,dx + y^{-\frac{1}{3}}\,dy = 0 ;$$

d'où :

$$ds = dx\sqrt{1 + \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}\,dx}{x^{\frac{1}{3}}} ;$$

Par suite, on a :

$$S = \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{2} x^{\frac{2}{3}}, \text{ pour l'arc compris depuis } x = 0 \text{ jusque } x = x.$$

Si l'on prend l'intégrale de 0 à a, il vient pour le quart de la courbe :

$$S = \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{2} a^{\frac{2}{3}} = \frac{3a}{2}.$$

La courbe entière aura pour longueur $6a$.

Remarque. — On peut trouver la longueur de la courbe d'une autre manière. Observons que l'équation :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}},$$

est vérifiée en faisant :

$$x = a\cos^3\theta, \qquad y = a\sin^3\theta.$$

On aura donc :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 9a^2(\cos^4\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta\cos^2\theta)\,d\theta^2$$
$$= 9a^2\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta^2.$$

Donc :

$$S = 3a\int_0^\theta \sin\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{3a}{2}\sin^2\theta.$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a : $S = \frac{3a}{2}$.

3. Trouver la longueur d'un arc d'épicycloïde.

Les formules :

$$x = (R + R')\cos\alpha - R'\cos\frac{R + R'}{R'}\alpha,$$

$$y = (R + R')\sin\alpha - R'\sin\frac{R + R'}{R'}\alpha,$$

nous donnent :

$$dx = \left[-(R + R')\sin\alpha + (R + R')\sin\frac{R + R'}{R'}\alpha\right]d\alpha,$$

$$dy = \left[\left(R + R'\right)\cos\alpha - \left(R + R'\right)\cos\frac{R + R'}{R'}\alpha\right]d\alpha\,;$$

par suite :

$$ds^2 = \left[2\left(R+R'\right)^2 - 2\left(R+R'\right)^2\left\{\sin\alpha\sin\frac{R+R'}{R'}\alpha + \cos\alpha\cos\frac{R+R'}{R'}\alpha\right\}\right]d\alpha^2$$

$$= 2\left(R+R'\right)^2\left\{1-\cos\frac{R}{R'}\alpha\right\}d\alpha^2 = 4\left(R+R'\right)^2\sin^2\frac{R}{2R'}\alpha.\,d\alpha^2.$$

On a donc :

$$S = 2\left(R + R'\right)\int_0^\alpha \sin\frac{R}{2R'}\alpha.\,d\alpha$$

$$= \frac{4(R+R')R'}{R}\left\{-\cos\frac{R}{2R'}\alpha + 1\right\} = \frac{4R'(R+R')}{R}\left\{1-\cos\frac{R}{2R'}\alpha\right\}.$$

Pour $R = R'$, on a la longueur d'un arc de *cardioïde* :

$$S = 8R\left(1 - \cos\frac{1}{2}\alpha\right),$$

et, pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, il vient :

$$S = 8R\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

En intégrant de $\frac{\pi}{2}$ à π, on trouve :

$$S = 8R\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

La longueur de la moitié de la courbe est $= 8R$, et celle de la courbe entière $= 16R$.

4. Trouver la longueur d'un arc de cycloïde.

L'équation de la courbe rapportée à la tangente au sommet est :

$$dx = dy\sqrt{\frac{2a - y}{y}}\,;$$

on a donc :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{2a}{y} dy^2 .$$

Par suite :

$$S = \sqrt{2a} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{2ay} .$$

Pour $y = 2a$, on a pour la longueur de la moitié de la courbe :

$$S = 4a .$$

Enfin, la longueur totale $= 8a$.

5. Trouver la longueur d'un arc de la logarithmique :

$$y = a e^{\frac{x}{a}} .$$

On a :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 \left(1 + e^{\frac{2x}{a}}\right) .$$

En posant $e^{\frac{x}{a}} = z$, d'où $x = a\,l\,z$, il vient :

$$ds = a \frac{\sqrt{1+z^2}\,dz}{z}, \quad \text{ou bien} \quad S = a \int_1^z \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} dz.$$

Or,

$$\int \frac{\sqrt{1+z^2}\,dz}{z} = \int \frac{(1+z^2)\,dz}{z\sqrt{1+z^2}} = \int \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}} + \int \frac{z\,dz}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$= \sqrt{1+z^2} + \int \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}} .$$

Pour obtenir la dernière intégrale, on posera :

$$\sqrt{1+z^2} = u - z ,$$

et l'on trouvera facilement (p. 62, nº 11) :

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}} = l \frac{-1 + \sqrt{1+z^2}}{z} ;$$

donc,

$$\int \frac{\sqrt{1+z^2}}{z}\,dz = \sqrt{1+z^2} + l\,\frac{-1+\sqrt{1+z^2}}{z}.$$

Enfin, si l'on compte l'arc S à partir de l'axe des y, on a :

$$S = a\left[\sqrt{1+z^2} + l\,\frac{\sqrt{1+z^2}-1}{z}\right]_1^z$$

$$= \left[\sqrt{a^2+y^2} + a\,l\,\frac{\sqrt{a^2+y^2}-a}{y}\right]_a^y.$$

6. Trouver la longueur d'un arc de la chaînette :

$$y = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right).$$

On a :

$$dy = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right) dx\,;$$

d'où :

$$ds^2 = \frac{1}{4}\left[4 + \left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right)^2\right] dx^2 = \frac{1}{4}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right)^2 dx^2\,.$$

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) dx\,,$$

$$S = \frac{1}{2}\int_0^x \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}}\right) dx = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right) = \sqrt{y^2 - c^2}\,,$$

si l'on compte l'arc S à partir du point pour lequel on a $x = 0$.

7. Trouver la longueur d'un arc de la *spirale d'Archimède.*

L'équation de la courbe étant :

$$u = a\,\omega\,,$$

on en tire :

$$ds^2 = du^2 + u^2\,d\omega^2 = a^2\,(1+\omega^2)\,d\omega^2\,;$$

d'où, en comptant l'arc S à partir du pôle,

$$S = a\int_0^{\omega} \sqrt{1+\omega^2}\, d\omega = \frac{a}{2}\left[\omega\sqrt{1+\omega^2} + l\left(\omega + \sqrt{1+\omega^2}\right)\right].$$

8. Trouver la longueur d'un arc de la *spirale logarithmique* :

$$u = b\, e^{\frac{\omega}{c}}.$$

On en tire :

$$\omega = c\, l\,\frac{u}{b}, \qquad \frac{d\omega}{du} = \frac{c}{u}.$$

Par conséquent :

$$s = \int_{u_1}^{u_2} \sqrt{1+c^2}\, du = \sqrt{1+c^2}\left(u_2 - u_1\right).$$

9. Trouver la longueur d'un arc de la *cardioïde* :

$$u = 2\,a\left(1 + \cos\omega\right) = 4\,a\cos^2\frac{1}{2}\,\omega.$$

Comme on a :

$$du = -\,2\,a \sin\omega\, d\omega,$$

la formule :

$$ds^2 = du^2 + u^2\, d\,\omega^2,$$

nous donne :

$$ds^2 = \left[4\,a^2\sin^2\omega + 4\,a^2\left(1 + \cos^2\omega + 2\cos\omega\right)\right]d\omega^2$$

$$= \left(4\,a^2 + 4\,a^2 + 8\,a^2\cos\omega\right)d\omega^2.$$

Par suite :

$$ds = 2\,a\sqrt{2\left(1+\cos\omega\right)}\,d\,\omega = 2\,a\sqrt{4\cos^2\frac{1}{2}\,\omega}\;d\omega$$

$$= 4\,a\cos\frac{1}{2}\,\omega\, d\omega\,;$$

d'où, si l'on compte l'arc S à partir de $\omega = 0$,

$$S = 8\,a \sin \frac{1}{2}\,\omega\,.$$

La longueur de la moitié de la courbe s'obtient en faisant $\omega = \pi$, ce qui nous donne :

$$S = 8\,a\,,$$

et la courbe entière a pour longueur $16\,a$.

10. Trouver la longueur d'un arc de la courbe déterminée par le cylindre parabolique :

$$4\,a\,x = (y + z)^2\,,$$

et le cône elliptique :

$$\frac{4}{3}\,x^2 + y^2 = z^2\,.$$

La première équation nous donne :

$$y + z = 2\sqrt{a\,x}\,;$$

la seconde peut s'écrire :

$$\left(z + y\right)\left(z - y\right) = \frac{4}{3}\,x^2\,,$$

d'où :

$$z - y = \frac{2}{3}\,x\sqrt{\frac{x}{a}}\,.$$

On a donc :

$$dy + dz = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\,dx\,,\quad dz - dy = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{x}\,d\,x\,;$$

par conséquent :

$$dz^2 + dy^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right)dx^2 = \frac{a^2 + x^2}{2\,a\,x}\,dx^2,$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{(a + x)^2}{2\,a\,x}\,dx^2\,;$$

enfin,

$$S = \int_0^x \frac{(a + x)\, dx}{\sqrt{2\,a\,x}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{a}} \left(a + \frac{x}{3}\right).$$

Mais, on voit facilement que :

$$z = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a}} \left(a + \frac{x}{3}\right);$$

par conséquent, on a pour la longueur d'un arc de la courbe à partir de l'origine :

$$S = z\sqrt{2}.$$

11. Trouver la longueur d'un arc de l'*hélice paraboloïdique* :

$$x^2 + y^2 = cz,$$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{c}.$$

On a les deux équations :

$$x^2 + y^2 = cz,$$

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \frac{z}{c}.$$

D'où l'on tire :

$$2\,x\,dx + 2\,y\,dy - c\,dz = 0,$$

$$-\,y\,dx + x\,dy - z\,dz = 0;$$

on a donc :

$$\frac{dx}{-\,2\,y\,z + c\,x} = \frac{dy}{c\,y + 2\,x\,z} = \frac{dz}{2\,(x^2 + y^2)},$$

d'où :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dz^2 \frac{c^2 + 4\,z^2 + 4\,(x^2 + y^2)}{4\,(x^2 + y^2)} = \frac{(c + 2z)^2}{4\,c\,z} dz^2,$$

et enfin,

$$S = \int_0^z \frac{c + 2\,z}{\sqrt{4\,c\,z}}\, dz = \sqrt{c\,z} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{z^3}{c}}.$$

12. Trouver la longueur de la courbe déterminée par les équations :

$$y^2 = 4\,a\,x\,,$$

$$z = \sqrt{2\,c\,x - x^2} + c \text{ arc sin vers } \frac{x}{c}\,.$$

On trouve facilement :

$$dy = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}\,dx\,, \qquad dz = \sqrt{\frac{2\,c - x}{x}}\,dx\,;$$

par suite,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{2\,c + a}{x}\,dx^2\,;$$

d'où, si l'on compte l'arc S à partir de l'origine,

$$\mathrm{S} = \int_0^x \sqrt{2\,c + a}\,\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{2c + a}\sqrt{x}\,.$$

13. Trouver la longueur de l'hélice déterminée par les équations :

$$x = a\cos t\,, \qquad y = a\sin t\,, \qquad z = c\,t\,.$$

Nous aurons facilement :

$$ds^2 = (a^2 + c^2)\,d\,t^2\,,$$

d'où :

$$\mathrm{S} = \int \sqrt{a^2 + c^2}\,d\,t = t\sqrt{a^2 + c^2}\,.$$

14. Trouver la longueur de l'*hélice conique* :

$$x^2 + y^2 = z^2\,\mathrm{tg}^2\,\gamma\,,$$

$$\frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\frac{z}{c}\,.$$

On a les deux équations :

$$x^2 + y^2 = z^3\,\mathrm{tg}^2\,\gamma\,,$$

$$\text{arc tg}\,\frac{y}{x} = \frac{z}{c}\,.$$

On en tire :

$$x\,dx + y\,dy - z\,\mathrm{tg}^2\gamma\,dz = 0,$$

$$\frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} - \frac{dz}{c} = 0,$$

ou bien :

$$x\,dx + y\,dy - z\,\mathrm{tg}^2\gamma\,dz = 0,$$

$$-y\,dx + x\,dy - \frac{z^2\,\mathrm{tg}^2\gamma}{c}\,dz = 0.$$

Par suite,

$$\frac{dx}{zx\,\mathrm{tg}^2\gamma - \frac{y\,z^2\,\mathrm{tg}^2\gamma}{c}} = \frac{dy}{zy\,\mathrm{tg}^2\gamma + \frac{x\,z^2}{c}\,\mathrm{tg}^2\gamma} = \frac{dz}{x^2 + y^2},$$

ou bien :

$$\frac{c\,dx}{z\,\mathrm{tg}^2\gamma\,(cx - yz)} = \frac{c\,dy}{z\,\mathrm{tg}^2\gamma\,(cy + zx)} = \frac{dz}{x^2 + y^2},$$

enfin,

$$\frac{dx}{cx - yz} = \frac{dy}{cy + zx} = \frac{dz}{cz} = \frac{ds}{\sqrt{(c^2 + z^2)\,z^2\,\mathrm{tg}^2\gamma + c^2 z^2}}.$$

On a par conséquent :

$$ds = \frac{dz}{c}\sqrt{c^2\left(1 + \mathrm{tg}^2\gamma\right) + z^2\,\mathrm{tg}^2\gamma} = \frac{dz}{c\cos\gamma}\sqrt{c^2 + z^2\sin^2\gamma};$$

d'où :

$$S = \frac{1}{c\cos\gamma}\int_0^z \sqrt{c^2 + z^2\sin^2\gamma}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\,c\cos\gamma}\left[z\sqrt{c^2 + z^2\sin^2\gamma} + \frac{c^2}{\sin\gamma}\,l\,\frac{z\sin\gamma + \sqrt{c^2 + z^2\sin^2\gamma}}{c}\right].$$

APPLICATIONS.

1. Trouver la longueur d'un arc de la *tractrice* :

Rép. $s = a\,l\,\frac{a}{y}$.

2. La longueur d'un arc de la parabole cubique $y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}$ compté à partir de l'origine est $s = \frac{2}{3}\left[\sqrt{\frac{(x+a)^3}{a}} - a\right]$.

3. La longueur d'un arc de la courbe :

$$8\,a^2\,y^2 = x^2\,(a^2 - x^2)\,,$$

est : $s = y + \frac{a}{\sqrt{2}}\,\text{arc sin}\,\frac{x}{a}$.

4. La longueur d'un arc de la courbe $y = a\,l\left(\frac{a^2}{a^2 - y^2}\right)$,

est : $s = a\,l\left(\frac{a+x}{a-x}\right) - x$.

5. La longueur de la courbe $y = l\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$, depuis $x = 1$, jusque $x = 2$, est $s = l\left(e + \frac{1}{e}\right)$.

6. La longueur d'un arc de la spirale : $u = a\,\frac{e^\omega - 1}{e^\omega + 1}$,

est : $s = a\,\omega - u$.

7. La longueur de la courbe déterminée par les équations :

$$y = \frac{x^2}{4\,a}\,, \quad z = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x^3}{a}}\,,$$

est : $s = x + y$.

8. La longueur de la courbe déterminée par les équations :

$$y = a\,\text{arc sin}\,\frac{x}{a}\,, \qquad z = \frac{1}{4}\,a\,l\,\frac{a+x}{a-x}\,,$$

est : $s = x + z$.

XII. — Volumes et aires des corps de révolution.

1. Etant donnée (fig. 6) la droite $y = m x$, trouver le volume engendré par l'aire ABQP tournant autour de l'axe des x.

La formule connue nous donne :

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_a^b m^2 x^2\, dx = \pi\, m^2 \left(\frac{x^3}{3}\right)_a^b,$$

en posant $OP = a$, $OQ = b$. On a donc :

$$V = \pi\, m^2 \frac{b^3 - a^3}{3} = \pi\, m^2 \left(b - a\right) \frac{b^2 + a^2 + a\,b}{3}$$

$$= \frac{\pi(b - a)}{3} \left\{ m^2\, b^2 + m^2\, a^2 + m^2\, ab \right\}$$

$$= \frac{\pi\,(b - a)}{3} \left(h'^2 + h^2 + hh'\right),$$

en posant $AP = h$, $BQ = h'$.

2. Trouver le volume (fig. 7) d'un segment de sphère.

En posant $OP = x_0$, $OQ = x_1$, le volume engendré par MNQP en tournant autour de l'axe des x, sera :

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_1} y^2\, dx.$$

L'équation du cercle étant $x^2 + y^2 = R^2$, on aura :

$$V = \pi \int_{x_0}^{x_1} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi\, R^2 \left(x_1 - x_0\right) - \pi\, \frac{x_1^3 - x_0^3}{3}$$

$$= \frac{\pi\,(x_1 - x_0)}{3} \left\{ 3\, R^2 - x_1^2 - x_0^2 - x_1\, x_0 \right\}$$

$$= \frac{\pi\,(x_1 - x_0)}{6} \left\{ 3x_0^2 + 3y_0^2 + 3x_1^2 + 3y_1^2 - 2x_1^2 - 2x_0^2 - 2\,x_1 x_0 \right\}$$

$$= \frac{\pi(x_1 - x_0)}{6} \left\{ 3\left(y_0^2 + y_1^2\right) + \left(x_1 - x_0\right)^2 \right\}$$

$$= \pi\left(x_1 - x_0\right) \frac{y_1^2 + y_0^2}{2} + \pi \frac{(x_1 - x_0)^3}{6},$$

ce qui est la formule connue en géométrie.

Remarque. — Si le segment n'a qu'une base, par exemple si $x_0 = 0$, il vient :

$$V = \pi \int_0^{x_1} \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi R^2 x_1 - \frac{\pi x_1^3}{3}$$

$$= \frac{\pi x_1 y_1^2}{2} + \frac{\pi x_1^3}{6}.$$

Volume de la sphère. — En faisant $x_1 = R_1$, $x_0 = 0$, on a pour la moitié du volume de la sphère :

$$V = \pi \int_0^R \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi R^3 - \frac{\pi R^3}{3} = \frac{2}{3} \pi R^3;$$

le volume total $= \frac{4}{3} \pi R^3$.

3. Trouvez le volume engendré (fig. 8) par la cycloïde tournant autour de sa base.

L'équation de la courbe rapportée aux axes $0x$ et $0y$ est :

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}}.$$

Nous aurons pour le volume engendré par la moitié de la courbe :

$$V = \pi \int_{y=0}^{y=2a} y^2\,dx = \pi \int_0^{2a} \frac{y^3\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = \pi \int_0^{2a} \frac{y^3\,dy}{\sqrt{a^2 - (a-y)^2}}.$$

En posant $a - y = a \cos\varphi$, d'où $dy = a \sin\varphi\,d\varphi$, il vient :

$$\int \frac{y^3\,dy}{\sqrt{2\,a\,y - y^2}} = \int \frac{a^3\,(1 - \cos\varphi)^3\,a \sin\varphi\,d\varphi}{a \sin\varphi}$$

$$= a^3 \int \left(1 - 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi - \cos^3\varphi\right) d\varphi$$

$$= a^3 \left[\varphi - 3\sin\varphi + 3\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2}\right) - \frac{2}{3}\sin\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi\right]$$

$$= a^3 \left[\frac{5\,\varphi}{2} - \frac{11}{2}\sin\varphi + \frac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi\right]$$

$$= a^3 \left[\frac{5\,\varphi}{2} - 4\sin\varphi + \frac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right].$$

De l'équation $a - y = a\cos\varphi$, nous tirons :

1° pour $y = 0$, $\cos\varphi = 1$, d'où $\varphi = 0$;

2° pour $y = 2a$, $\cos\varphi = -1$, d'où $\varphi = \pi$.

On a donc :

$$\int_0^{2a} \frac{y^3\,dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = a^3 \left[\frac{5\varphi}{2} - 4\sin\varphi + \frac{3}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\pi}$$

$$= a^3 \left(\frac{5\,\pi}{2}\right).$$

Par conséquent :

$$V = \frac{5\,\pi^2\,a^3}{3}\,;$$

le volume engendré par la courbe entière tournant autour de sa base sera donc $= 5\,\pi^2\,a^3$.

Remarque. — On serait arrivé tout aussi facilement au résultat, en faisant dans la formule :

$$V = \pi \int y^2\,dx,$$

$$x = a\,(\varphi - \sin\varphi), \text{ et } y = a\,(1 - \cos\varphi).$$

4. Trouver le volume engendré par la cycloïde tournant autour de la tangente au sommet (fig. 9).

L'équation de la courbe rapportée à la tangente au sommet étant :

$$dx = dy\sqrt{\frac{2a - y}{y}},$$

on a, pour la moitié du volume cherché :

$$V = \pi\int_{y=0}^{y=2a} y^2\,dx = \pi\int_0^{2a} y\sqrt{2ay - y^2}\,dy = \pi\int_0^{2a} y\sqrt{a^2 - (a-y)^2}\,dy\,.$$

Or, en posant comme ci-dessus $a - y = a\cos\varphi$, et remarquant que l'on a pour $y = 0$, $\varphi = 0$, et pour $y = 2a$, $\varphi = \pi$, il vient :

$$V = \pi a^3\int_0^{\pi}(1 - \cos\varphi)\sin^2\varphi\,dx = \pi a^3\int_0^{\pi}(\sin^2\varphi - \sin^2\varphi\cos\varphi)d\varphi;$$

par conséquent :

$$V = \pi a^3\left[\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2 a^3}{2}.$$

Le volume total sera donc $= \pi^2 a^3$.

5. Trouver le volume engendré par la *cissoïde* tournant autour de l'axe des x.

L'équation de la courbe étant :

$$y = x\sqrt{\frac{x}{2a - x}},$$

on a pour le volume engendré par une portion de la courbe :

$$V = \pi\int_0^x y^2\,dx = \pi\int_0^x \frac{x^3}{2a - x}\,dx$$

$$= \pi\int_0^x\left[\frac{8a^3}{2a - x} - (4a^2 + 2ax + x^2)\right]dx\,.$$

En effet :

$$\frac{x^3}{2a - x} = \frac{8a^3}{2a - x} - \frac{8a^3 - x^3}{2a - x}$$

$$= \frac{8a^3}{2a - x} - (4a^2 + 2ax + x^2)$$

Par conséquent :

$$V = \pi \left\{ -8a^3 l(2a-x) - 4a^2x - ax^2 - \frac{x^3}{3} \right\}_0^x$$

$$= \pi \left[-8a^3 l(2a-x) - 4a^2x - ax^2 - \frac{x^3}{3} + 8a^3 l\, 2a \right\}$$

$$= \pi \left\{ 8a^3 l \frac{2a}{2a-x} - 4a^2x - ax^2 - \frac{x^3}{3} \right\}.$$

En faisant $x = a$, on a :

$$V = \pi \int_0^a y^2\, dx = \pi \left\{ 8a^3 l\, 2 - \frac{16}{3} a^3 \right\} = 8\pi a^3 \left(l\, 2 - \frac{2}{3} \right).$$

6. Trouver le volume engendré par la cissoïde tournant autour de son asymptote.

On a :

$$V = \pi \int x'^2 dy,$$

la courbe étant rapportée à son asymptote prise pour axe des y.

Or, si la courbe est rapportée à ses axes ordinaires (n° 5, p. 112), on a entre les coordonnées x et x' la relation

$$x + x' = 2a; \quad \text{d'où } x' = 2a - x,$$

et, par conséquent, la formule du volume sera :

$$V = \pi \int (2a - x)^2 dy.$$

De l'équation de la courbe :

$$y = x\sqrt{\frac{x}{2a-x}};$$

on tire :

$$dy = \frac{(3a-x)\sqrt{2ax - x^2}}{(2a-x)^2} dx;$$

d'où :

$$V = \pi \int_0^{2a} (3a - x)\sqrt{2ax - x^2}.\, dx$$

$$= \pi \left[a^3 \arc\cos \frac{a - x}{a} - \frac{x^2 - 5ax + 3a^2}{3} \sqrt{2ax - x^2} \right]_0^{2a}$$

$$= \pi^2 a^3.$$

Le volume engendré par la courbe entière $= 2\pi^2 a^3$.

7. Trouver le volume engendré par la révolution d'un cercle tournant autour d'une droite située dans son plan (fig. 10).

La droite autour de laquelle la révolution s'effectue étant prise pour axe des x, l'équation du cercle est :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2. \quad (1)$$

Si l'on désigne par Y et y les deux ordonnées MP et M′P correspondant à une même abscisse O P $= x$, on a :

$$V = \pi \int_{\alpha - R}^{\alpha + R} (Y^2 - y^2)\, dx. \quad (2)$$

Il est facile de voir que les limites O A et O B de x, sont respectivement égales à $\alpha - R$ et $\alpha + R$.

L'équation (1) résolue par rapport à y nous donne :

$$y = \beta \pm \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2};$$

ce sont les deux valeurs Y et y. En les substituant dans (2), il vient :

$$V = \pi \int_{\alpha - R}^{\alpha + R} 4\beta \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}\, dx = 4\pi\beta \int_{\alpha - R}^{\alpha + R} \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}\, dx.$$

Or, l'intégrale $2\int_{\alpha - R}^{\alpha + R} \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}\, dx$ exprime l'aire du cercle mobile ; par suite, le volume est égal à cette aire multipliée par $2\pi\beta$. *Le volume engendré est donc égal à l'aire du cercle générateur multipliée par la circonférence décrite par le*

centre de ce cercle. Le corps dont nous venons de trouver le volume porte le nom de *Tore.*

8. Trouver le volume engendré par une ellipse (fig. 11) tournant autour d'une parallèle au grand axe située à une distance c de cet axe. (On suppose $c > b$.)

L'ellipse rapportée au point O pris pour origine a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-c)^2}{b^2} = 1,$$

ou bien :

$$y^2 - 2cy + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} - 1\right) = 0;$$

d'où :

$$y = c \pm \sqrt{c^2 - b^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} - 1\right)} = c \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

On a donc :

$$y_1 = c + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y_0 = c - \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

et l'expression du volume cherché est :

$$\mathrm{V} = \pi\int_0^x \left(y_1^2 - y_0^2\right) dx = \frac{4\pi bc}{a}\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{2\pi bc}{a}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right].$$

En faisant $x = a$, on a pour le volume du demi-anneau

$$\mathrm{V}' = \frac{2\pi bc}{a}\left(\frac{\pi a^2}{2}\right) = \pi^2 abc,$$

et, par conséquent, le volume total $= 2\pi^2 abc$.

9. Trouver le volume engendré par la podaire de l'ellipse tournant autour de l'axe des x.

L'équation de la courbe étant :

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2,$$

on en tire :

$$y^4 + (2x^2 - b^2)y^2 + x^2(x^2 - a^2) = 0\,;$$

d'où, en prenant la valeur positive du radical,

$$y^2 = \frac{b^2 - 2x^2 + \sqrt{b^4 + 4(a^2 - b^2)x^2}}{2}.$$

On a donc pour le volume cherché :

$$V = \frac{\pi}{2}\int_0^x \left\{ b^2 - 2x^2 + \sqrt{b^4 + 4(a^2 - b^2)x^2} \right\} dx.$$

Or, on a :

$$\int \left\{ b^2 - 2x^2 + \sqrt{b^4 + 4(a^2 - b^2)x^2} \right\} dx = b^2x - 2\,\frac{x^3}{3}$$
$$+ \int \sqrt{b^4 + 4(a^2 - b^2)x^2}\,.\,dx\,;$$

mais,

$$\int \sqrt{b^4 + 4(a^2 - b^2)x^2}\,.\,dx = x\sqrt{b^4 + 4(a^2 - b^2)x^2}\,.\,dx$$
$$- \int \frac{4(a^2 - b^2)x^2\,dx}{\sqrt{b^4 + 4(a^2 - b^2)x^2}}\,;$$

d'où :

$$\int \sqrt{b^4 + 4(a^2 - b^2)x^2}\,.\,dx = \frac{x\sqrt{b^4 + 4(a^2 - b^2)x^2}}{2}$$
$$+ \frac{b^4}{4\sqrt{a^2 - b^2}}\, l\left(\frac{2x\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{b^4 + 4(a^2 - b^2)x^2}}{2\sqrt{a^2 - b^2}}\right).$$

On a donc :

$$V = \frac{\pi}{2}\left\{ b^2x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x\sqrt{b^4 + 4(a^2 - b^2)x^2}}{2}\right.$$
$$\left. + \frac{b^4}{4\sqrt{a^2 - b^2}}\, l\left(\frac{2x\sqrt{a^2 - b^2} + \sqrt{b^4 + 4(a^2 - b^2)x^2}}{b^2}\right)\right\}.$$

La moitié du volume total s'obtient en faisant $x = a$,

$$V_1 = \frac{\pi}{2}\left\{ ab^2 - \frac{2a^3}{3} + \frac{a\sqrt{b^4 + 4(a^2 \quad b^2)a^2}}{2} + \right.$$

$$+\frac{b^4}{4\sqrt{a^2-b^2}}\, l\, \frac{2a\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{b^4+4(a^2-b^2)a^2}}{b^2}\Bigg\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\Bigg\{ab^2-\frac{2a^3}{3}+\frac{a(2a^2-b^2)}{2}+\frac{b^4}{4\sqrt{a^2-b^2}}\, l\, \frac{2a\sqrt{a^2-b^2}+2a^2-b^2}{b^2}\Bigg\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\Bigg\{\frac{a(3b^2+2a^2)}{6}+\frac{b^4}{4\sqrt{a^2-b^2}}\, l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\Bigg\}.$$

Le volume total sera :

$$V_2=\pi\Bigg\{\frac{a(3b^2+2a^2)}{b}+\frac{b^4}{2\sqrt{a^2-b^2}}\, l\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)\Bigg\}$$

10. Trouver l'aire d'une zone sphérique (fig. 12).

La formule qui donne l'aire cherchée est :

$$A=2\pi\int y\, d\, s.$$

Or, l'équation du cercle étant :

$$x^2+y^2=R^2,$$

on a :

$$ds^2=dx^2\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)=\frac{R^2\, dx^2}{y^2}.$$

Par suite :

$$A=2\pi R\int_{x_0}^{x_1} dx=2\pi R\,(x_1-x_0),$$

ce qui est la formule connue.

Cas particulier. — Si l'on fait $x_0=0$, il vient :

$$A_1=2\pi R\, x_1\,;$$

enfin, si $x_1=R$, on a la moitié de la surface de la sphère $=2\pi R^2$. Donc la sphère entière $=4\pi R^2$.

11. Trouver l'aire de la surface de révolution engendrée par la courbe :

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}},$$

tournant autour de l'axe des x.

En posant $x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta$, valeurs qui satisfont à l'équation de la courbe, on a :

$$ds = 3\, a \sin \theta \cos \theta\, d\, \theta\,;$$

d'où :

$$A = 2\,\pi \int y\, ds = 6\,\pi\, a^2 \int_0^\theta \sin^4 \theta \cos \theta\, d\, \theta = \frac{6\,\pi\, a^2}{5} \sin^5 \theta.$$

On obtient la moitié de la surface totale en faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne :

$$A_1 = 6\,\pi\, a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta \cos \theta\, d\, \theta = \frac{6\,\pi\, a^2}{5}.$$

Enfin, la surface totale $= \frac{12\,\pi\, a^2}{5}$.

12. Trouver la surface du *tore* (fig. 13) comprise entre deux plans perpendiculaires à l'axe de révolution.

L'équation du cercle étant :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2,$$

on a :

$$y = \beta \pm \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}.$$

Par conséquent, l'aire décrite par A B est :

$$A_1 = 2\,\pi \int \left\{ \beta + \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2} \right\} ds$$

$$= 2\,\pi\, \beta\, s + 2\,\pi \int \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}.\, ds.$$

L'aire décrite par C D sera :

$$A_2 = 2\,\pi \int \left\{ \beta - \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2} \right\} ds$$

$$= 2\,\pi\, \beta\, s - 2\,\pi \int \sqrt{R^2 - (x - \alpha)^2}.\, ds.$$

L'aire cherchée sera $= A_1 + A_2$; on a donc :

$A = A_1 + A_2 = 4\pi\beta s$, en désignant par s la longueur de l'arc $AB = CD$.

Si l'on fait $s = \pi R$, c'est-à-dire égal à la moitié de la circonférence, il vient :

$$A = 4\pi^2\beta R = 2\pi\beta . 2\pi R.$$

L'aire totale du tore est donc égale à la circonférence génératrice multipliée par la circonférence décrite par le centre, ou bien elle est égale à la surface latérale d'un cylindre ayant pour base le cercle générateur, et pour hauteur la circonférence décrite par son centre.

13. Trouver l'aire de la surface de révolution engendrée par la *cissoïde* tournant autour de l'axe des x.

L'équation de la courbe étant : $y = x\sqrt{\dfrac{x}{2a - x}}$, on a :

$$A = 2\pi \int_0^x y\,ds = 2\pi a \int_0^x \frac{x\sqrt{8ax - 3x^2}}{(2a - x)^2}\,dx$$

$$= 2\pi a\sqrt{3}\int_0^x \frac{x\sqrt{\frac{16}{9}a^2 - \left(\frac{4}{3}a - x\right)^2}}{(2a - x)^2}\,dx.$$

En posant $\frac{4}{3}a - x = \frac{4}{3}a\cos\varphi$, il vient :

$$A = \frac{32\pi a^2\sqrt{3}}{3}\int \frac{(1 - \cos\varphi)\sin^2\varphi}{(1 + 2\cos\varphi)^2}\,d\varphi$$

$$= \frac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}\int\left(\cos\varphi - 2 + \frac{3(\cos\varphi + 2)}{(1 + 2\cos\varphi)^2}\right)d\varphi$$

$$= \frac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}(\sin\varphi - 2\varphi) + 8\pi a^2\sqrt{3}\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(1 + 2\cos\varphi)^2}$$

$$+ 16\pi a^2\sqrt{3}\int\frac{d\varphi}{(1 + 2\cos\varphi)^2}.$$

$$= \frac{8\pi a^2\sqrt{3}}{3}(\sin\varphi - 2) + 4\pi a^2\sqrt{3}\left[\int\frac{d\varphi}{1+2\cos\varphi} + 3\int\frac{d\varphi}{(1+2\cos\varphi)^2}\right]$$

On trouve facilement, en posant $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = t$,

$$\int\frac{d\varphi}{(1+2\cos\varphi)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, l\, \frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, l\, \frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi};$$

$$\int\frac{d\varphi}{(1+2\cos\varphi)^2} = \frac{1}{3}\,\frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{3-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi} - \frac{\sqrt{3}}{6}\, l\, \frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}.$$

Par suite :

$$A = \frac{8\pi a^2}{\sqrt{3}}(\sin\varphi - 2\varphi) + 4\pi a^2\, l\, \frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}$$

$$+ 8\pi a^2\sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{3-\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi} - 2\pi a^2\, l\, \frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi}.$$

$$= \frac{8\pi a^2}{\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{3}\sqrt{x(8a-3x)}}{4a} - 2\arccos\frac{4a-3x}{4a}\right]$$

$$+ 2\pi a^2\, l\, \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}}{\sqrt{3}-\sqrt{3}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}} + 8\pi a^2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}\sqrt{\frac{x}{2a-x}}}{3-\frac{3x}{2a-x}}$$

$$= \frac{6\pi a(2a-x)}{4a-3x}\sqrt{x(8a-3x)} - \frac{16\pi a^2}{\sqrt{3}}\arccos\frac{4a-3x}{4a}$$

$$+ 2\pi a^2\, l\, \frac{\sqrt{8a-3x}+\sqrt{x}}{\sqrt{8a-3x}-\sqrt{x}}.$$

APPLICATIONS.

1. Le volume engendré par une ellipse tournant autour de son grand axe est $V = \frac{4}{3} \pi a b^2$.

2. Le volume engendré par la tractrice tournant autour de l'axe des x est $V = \frac{\pi a^3}{3}$.

3. Le volume engendré par la chaînette tournant autour de l'axe des x est $V = \frac{\pi c}{2} (y s + c x)$.

4. Le volume engendré par la courbe $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ tournant autour de l'axe des x est :

$$V = 3 \pi x \left(\frac{1}{3} a^2 - \frac{3 a}{5} \sqrt{a x^2} + \frac{3 x}{7} \sqrt{a^2 x} - \frac{x^2}{9} \right).$$

Le volume total est $V_1 = \frac{32 \pi a^3}{105} = \frac{8}{35} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3$. Ce volume est donc égal aux $\frac{8}{35}$ du volume de la sphère dont a est le rayon.

5. Le volume engendré par la courbe $y^2 = ax \frac{x - 3 a}{x - 4 a}$, tournant autour de l'axe des x, et compris entre les limites $x = 0$, et $x = 3 a$, est : $V = \frac{1}{2} \pi a^3 \left(15 - 16 \, l \, 2 \right)$

6. La surface engendrée par la cycloïde tournant autour de la tangente au sommet est : $A = \frac{32 \pi a^2}{3}$.

7. La surface engendrée par la cycloïde tournant autour de sa base est : $A = \frac{64 \pi a^2}{3}$.

8. Le volume engendré par la courbe

$$y^2 (a^2 + x^2) = x^2 (a^2 - x^2),$$

tournant autour de l'axe des x, et compris entre les limites

$$x = 0, \text{ et } x = a, \text{ est : } V = \frac{\pi a^3}{6}\left(10 - 3\pi\right).$$

9. La surface engendrée par la tractrice tournant autour de l'axe des x est : $A = 4\pi a^2$.

10. Le volume engendré par la courbe :

$$(y^2 + x^2)^2 = a^2(x^2 - y^2),$$

tournant autour de l'axe des x, est :

$$V = \frac{\pi a^3}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\, l\left(1 + \sqrt{2}\right) - \frac{1}{3}\right\}.$$

XIII. — Volumes et surfaces des corps de forme quelconque.

La formule qui sert à exprimer un volume quelconque est :

$$V = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} z\, dx\, dy\,,$$

ou mieux :

$$V = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} (z_2 - z_1)\, dx\, dy\,.$$

Les valeurs z_1 et z_2 sont *deux des racines réelles* de l'équation :

$$F(x, y, z) = 0,$$

qui détermine la surface donnée.

Limites de y. — On imaginera un cylindre parallèle à l'axe des z et circonscrit à la surface. L'équation de ce cylindre servira à déterminer les limites y_1 et y_2 qui sont les valeurs maximum et minimum de y correspondant à une même valeur de x.

Equation du cylindre circonscrit. — Le plan tangent à la surface a pour équation :

$$\left(X-x\right)\frac{dF}{dx}+\left(Y-y\right)\frac{dF}{dy}+\left(Z-z\right)\frac{dF}{dz}=0\,;$$

comme il doit être parallèle à l'axe des z, pour être aussi tangent au cylindre, on aura la condition :

$$\frac{dF}{dz}=0.$$

En éliminant z entre les deux équations :

$$F(x, y, z)=0,$$

$$\frac{dF}{dz}=0,$$

on obtient l'équation du cylindre :

$$\psi(x, y)=0,$$

laquelle déterminera les valeurs y_1 et y_2.

Limites de x. — Ce sont les abscisses des plans tangents à la surface parallèles au plan des $y\,z$, ou bien les distances de ces plans au plan des $y\,z$. Elles correspondent aux tangentes à la trace du cylindre, parallèles à l'axe des y, ou perpendiculaires à l'axe des x ; on aura donc :

$$\frac{dy}{dx}=\infty, \text{ ou bien } \frac{d\psi}{dy}=0, \text{ puisque}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{d\psi}{dx}}{\frac{d\psi}{dy}}.$$

Par conséquent, l'équation

$$\frac{d\psi}{dy}=0,$$

servira à éliminer y de l'équation $\psi\,(x, y)=0$, et l'on

obtiendra une équation $\varphi(x) = 0$, dont on tirera les valeurs limites x_1 et x_2.

Remarque. — Il est quelquefois très avantageux, lorsque l'on recherche le volume d'un corps, d'employer des coordonnées polaires.

On peut décomposer le corps (fig. 14) en éléments infiniment petits par des plans passant par l'axe des z, et des cylindres ayant pour axes l'axe des z. L'élément de volume est alors un prisme infiniment petit, ayant pour base $npqr$, et pour hauteur mn. Or, en désignant par $On = \rho$ un rayon vecteur, et par $xOn = \omega$ l'angle que ce rayon fait avec Ox, l'élément infiniment petit compris entre les rayons vecteurs correspondant aux angles ω et $\omega + d\omega$, et les cercles correspondant aux rayons vecteurs ρ et $\rho + d\rho$, a pour surface :

$$\rho \, d\rho \, d\omega.$$

Le volume du prisme sera donc :

$$dV = z\rho \, d\omega \, d\rho\ ,$$

et le volume total aura pour expression :

$$V = \iint z \rho \, d\omega \, d\rho. \qquad \text{(A)}$$

Il est bien évident que l'on doit exprimer z en fonction de ρ et ω, au moyen de l'équation de la surface :

$$z = F(x, y),$$

et des formules :

$$x = \rho \cos \omega, \qquad y = \rho \sin \omega\ ;$$

par conséquent :

$$z = F(\rho \cos \omega, \rho \sin \omega).$$

Limites. — On intégrera dans la formule (A) d'abord par rapport à ρ, en considérant ω comme constant, et entre deux limites qui seront les valeurs de ρ qui, dans l'équation de la courbe limite (trace du cylindre circonscrit à la surface sur le

plan des xy), correspondent à la valeur considérée de ω, c'est-à-dire à une valeur quelconque de ω. Quant aux limites de ω, ce sont les valeurs extrêmes de cet angle, ordinairement 0 et $\frac{\pi}{2}$.

La formule à employer pour la détermination des surfaces courbes est :

$$A = \iint dx\, dy \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

On peut aussi employer les coordonnées polaires. La formule est alors, comme on s'en assure facilement :

$$A = \iint \rho\, d\rho\, d\omega \sqrt{1 + p^2 + q^2}. \quad \text{(B)}$$

Quelle que soit la méthode employée pour la détermination de la surface, les limites se trouvent de la même manière que ci-dessus. Nous allons d'ailleurs faire des applications des deux méthodes.

1. Trouver le volume commun au paraboloïde et au cylindre dont les équations sont :

$$y^2 + z^2 = 4\,ax,$$
$$x^2 + y^2 = 2\,ax.$$

La formule nous donne :

$$V = \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2\,ax - x^2}} dy \sqrt{4\,ax - y^2}.$$

Les limites de y sont données par le cylindre circonscrit à la surface, lequel est évidemment :

$$x^2 + y^2 = 2\,ax.$$

On voit que ces limites pour la partie du volume située au-dessus du plan des xy et en avant du plan des xz, sont $y = 0$ et $y = \sqrt{2\,ax - x^2}$. Quant aux limites de x, elles sont $x = 0$, et $x = 2\,a$.

On a facilement :

$$\int dy\sqrt{4ax-y^2}=\frac{y\sqrt{4ax-y^2}}{2}+2ax \text{ arc sin } \frac{y}{\sqrt{4ax}};$$

par suite,

$$\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} dy\sqrt{4ax-y^2}=\frac{x\sqrt{4a^2-x^2}}{2}+2ax \text{ arc sin } \sqrt{\frac{2a-x}{4a}}$$

Donc :

$$V=\frac{1}{2}\int_0^{2a} x\sqrt{4a^2-x^2}\,dx+2a\int_0^{2a} x\,dx.\text{ arc sin } \sqrt{\frac{2a-x}{4a}}.$$

On a :

$$\int x\,dx\sqrt{4a^2-x^2}=-\frac{1}{3}(4a^2-x^2)^{\frac{3}{2}};\int_0^{2a} x\,dx\sqrt{4a^2-x^2}=\frac{8a^3}{3};$$

$$\int x\,dx \text{ arc sin}\sqrt{\frac{2a-x}{4a}}=\frac{x^2}{2}\text{ arc sin}\sqrt{\frac{2a-x}{4a}}+\frac{1}{4}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4a^2-x^2}};$$

or,

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{4a^2-x^2}}=-\frac{x\sqrt{4a^2-x^2}}{2}+2a^2\text{ arc sin }\frac{x}{2a}.$$

Par conséquent :

$$\int x dx \text{ arc sin}\sqrt{\frac{2a-x}{4a}}=\frac{x^2}{2}\text{arc sin}\sqrt{\frac{2a-x}{4a}}-\frac{x\sqrt{4a^2\quad x^2}}{8}$$
$$+\frac{a^2}{2}\text{ arc sin }\frac{x}{2a},$$

et

$$\int_0^{2a} x\,dx.\text{ arc sin }\sqrt{\frac{2a-x}{4a}}=\frac{\pi a^2}{4}.$$

Enfin,

$$V=\frac{4a^3}{3}+\frac{\pi a^3}{2}.$$

Le volume total compris entre les deux corps étant évidemment égal à 4 V, on a :

$$\text{Vol. total} = \frac{16\,a^3}{3} + 2\,\pi\,a^3 = a^3\left(2\,\pi + \frac{16}{3}\right).$$

2. Trouver le volume du cylindre :

$$x^2 + y^2 = 2\,ax,$$

compris entre les deux plans :

$$z = x \operatorname{tg} \alpha, \text{ et } z = x \operatorname{tg} \beta.$$

La formule

$$V = \iint (z_2 - z_1)\,dx\,dy,$$

nous donne dans le cas actuel :

$$V = \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2\,ax - x^2}} x\,(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha)\,dy.$$

On voit facilement que les limites de y sont $y = 0$, et $y = \sqrt{2\,ax - x^2}$; les limites de x sont 0 et $2\,a$. Les limites de y sont établies pour la portion de volume en avant du plan des $z\,x$. On a :

$$V = \int_0^{2a} x\,dx.\,(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) \int_0^{\sqrt{2\,ax - x_2}} dy$$

$$= (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha) \int_0^{2a} x\,dx \sqrt{2\,ax - x^2}\,.$$

Or,

$$\int_0^{2a} x\,dx \sqrt{2\,ax - x^2} = \frac{\pi\,a^3}{2};$$

donc :

$$V = \frac{\pi\,a^3}{2}\left(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha\right).$$

Le volume total cherché est évidemment le double de V ; par suite :

$$\text{Vol. total} = \pi\,a^3\,(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha).$$

3. Trouver le volume compris entre le plan des xy et la surface :

$$z = e^{-x^2 - y^2}.$$

La formule (A) nous donne pour le quart du volume cherché :

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{\infty} z \rho \, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} . \rho \, d\rho;$$

or, on a :

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho^2} . \rho \, d\rho = -\left(\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right)_0^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

Donc :

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega = \frac{\pi}{4},$$

et, par conséquent, vol. total $= \pi$.

4. Trouver le volume de l'ellipsoïde :

$$c^2 z^2 + 2\, ab\, x z + a^2 (x^2 + y^2 - a^2) = 0.$$

Les sections parallèles au plan des xy étant des circonférences, nous appliquerons la formule :

$$V = \int_{z_0}^{z_1} \varphi(z)\, dz;$$

or, on a $\varphi(z) = \pi R^2$, R étant le rayon de la section faite à la hauteur z, rayon que nous allons calculer.

En supposant z constant l'équation :

$$a^2 x^2 + a^2 y^2 + 2\, a\, bx\, z = a^4 - c^2 z^2,$$

nous donne :

$$\left(x + \frac{bz}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{a^4 - (c^2 - b^2) z^2}{a^2};$$

nous aurons donc :

$$R = \frac{\sqrt{a^4 - (c^2 - b^2) z^2}}{a}.$$

Par conséquent,

$$V = \frac{\pi}{a^2} \int_{z_0}^{z_1} (a^4 - (c^2 - b^2) z^2) \, dz.$$

Pour déterminer les limites, menons deux plans tangents à la surface parallèles au plan des xy, et cherchons leurs distances au plan des xy, ou bien les coordonnées du point où ils rencontrent l'axe des z. Or, ces plans devant être parallèles au plan des xy, on doit avoir :

$$\frac{dF}{dx} = 0, \quad \frac{dF}{dy} = 0,$$

ou bien :

$$\left. \begin{array}{r} ab\,z + a^2 x = 0, \\ a^2 y = 0. \end{array} \right\}$$

On tire de là :

$$y = 0, \quad x = -\frac{bz}{a}.$$

Par suite, en remplaçant dans l'équation de l'ellipsoïde :

$$c^2 z^2 - b^2 z^2 - a^4 = 0,$$

d'où :

$$z = \pm \frac{a^2}{\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

On a enfin :

$$V = \frac{\pi}{a^2} \left[a^4 z - (c^2 - b^2) \frac{z^3}{3} \right]_{z_0}^{z_1}$$

$$= \frac{2\pi}{a^2} \left[\frac{a^6}{\sqrt{c^2 - b^2}} - \frac{(c^2 - b^2)}{3} \frac{a^6}{(c^2 - b^2)\sqrt{c^2 - b^2}} \right]$$

$$= \frac{2\pi a^4}{\sqrt{c^2 - b^2}} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \pi \frac{a^4}{\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

5. Trouver le volume commun au paraboloïde de révolution engendré par la parabole

$$z^2 = 2\,p\,x,$$

tournant autour de l'axe des x, et le cylindre elliptique droit :

$$y^2 = \frac{p}{a}\left(2\,ax - x^2\right). \quad \text{(A)}$$

Le volume est donné par la formule :

$$V = \int_0^x dx \int_0^{\sqrt{\frac{p}{a}(2\,ax - x^2)}} dy \sqrt{2\,p\,x - y^2}\,;$$

il est, en effet, facile de s'assurer que l'équation du paraboloïde est :

$$y^2 + z^2 = 2\,p\,x.$$

Limites de y. Elles sont évidemment déterminées par le cylindre (A), lequel nous donne : $y = 0$, $y = \sqrt{\frac{p}{a}\left(2\,ax - x^2\right)}$.

On a facilement :

$$\int_0^{\sqrt{\frac{p}{a}(2\,ax - x^2)}} dy \sqrt{2\,px - y^2} = \frac{p\,x\sqrt{2\,ax - x^2}}{2\,a} + px \text{ arc sin}\sqrt{\frac{2\,a - x}{2\,a}}.$$

Donc :

$$V = \frac{p}{2\,a}\int_0^x x\,dx.\sqrt{2\,ax - x^2} + p\int_0^x x\,dx \text{ arc sin}\sqrt{\frac{2\,a - x}{2\,a}}.$$

Or, on a :

$$A = \int_0^x x\,dx\sqrt{2\,ax - x^2} = a\int_0^x dx\sqrt{2\,ax - x^2}$$

$$- \int_0^x (a - x)\,dx\sqrt{2\,ax - x^2}.$$

$$\int_0^x dx\sqrt{2ax-x^2} = -\frac{(a-x)\sqrt{2ax-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\text{arc cos}\frac{a-x}{a}\ ;$$

$$\int_0^x (a-x)\sqrt{2ax-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}};$$

$$A = -\frac{a(a-x)\sqrt{2ax-x^2}}{2} + \frac{a^3}{2}\text{arc cos}\frac{a-x}{a} - \frac{1}{3}(2ax-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Cherchons : $B = \int_0^x x\,dx.\ \text{arc sin}\sqrt{\frac{2a-x}{2a}}$.

On a :

$$\int x\,dx\,\text{arc sin}\sqrt{\frac{2a-x}{2a}} = \frac{x^2}{2}\text{arc sin}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + \frac{1}{4}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}};$$

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = \int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2-(a-x)^2}}\ ;$$ posant $a-x = a\cos\varphi$,

on a :

$$\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = a^2\int(1+\cos^2\varphi - 2\cos\varphi)\,d\varphi$$

$$= a^2\left\{\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2}\right\}$$

$$= a^2\left\{\frac{3}{2}\text{arc cos}\frac{a-x}{a} - \frac{2\sqrt{2ax-x^2}}{a} + \frac{(a-x)\sqrt{2ax-x^2}}{2a^2}\right\}.$$

Mais,

$$\text{arc sin}\sqrt{\frac{2a-x}{2a}} = \frac{1}{2}\left(\pi - \text{arc cos}\frac{a-x}{a}\right);$$

d'où :

$$B = \frac{x^2}{4}\left(\pi - \text{arc cos}\frac{a-x}{a}\right) + \frac{3a^2}{8}\text{arc cos}\frac{a-x}{a} - \frac{a}{2}\sqrt{2ax-x^2}$$

$$+ \frac{(a-x)\sqrt{2ax-x^2}}{8}.$$

Enfin,

$$\frac{\mathrm{V}}{p}=\frac{(x-a)\sqrt{2ax-x^2}}{4}+\frac{a^2}{4}\text{arc cos}\frac{a-x}{a}$$

$$-\frac{1}{6a}(2ax-x^2)\sqrt{2ax-x^2}+\frac{\pi x^2}{4}-\frac{x^2}{4}\text{ arc cos}\frac{a-x}{a}$$

$$+\frac{3a^2}{8}\text{arc cos }\frac{a-x}{a}-\frac{a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{(a-x)\sqrt{2ax-x^2}}{8}$$

$$=\frac{\pi x^2}{4}+\frac{5a^2-2x^2}{8}\text{ arc cos}\frac{a-x}{a}+\frac{4x^2-5ax-15a^2}{24a}\sqrt{2ax-x^2}.$$

En faisant $x=2a$, on a pour le volume total compris dans le cylindre :

$$\mathrm{V}=p\left[\frac{4\pi a^2}{4}-\frac{3\pi a^2}{8}\right]=p\frac{5\pi a^2}{8}.$$

6. Trouver le volume commun à deux cylindres circulaires droits égaux qui se coupent rectangulairement.

Les équations des cylindres sont :

$$x^2+y^2=a^2,$$
$$y^2+z^2=a^2.$$

La formule (A, p. 124) nous donne dans le cas actuel :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\omega\int_0^a\sqrt{a^2-\rho^2\sin^2\omega}.\ \rho\, d\rho,$$

puisque : $z=\sqrt{a^2-y^2}=\sqrt{a^2-\rho^2\sin^2\omega}.$

Il est facile de voir que les limites de ρ sont 0 et a, si l'on ne considère que la huitième partie du volume total.

En effet, l'équation $x^2+y^2=a^2$, nous donne :

$$\rho=\pm a.$$

Quant aux limites de ω elles sont 0 et $\frac{\pi}{2}$.

On trouve facilement :

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \omega}\,.\,\rho\, d\rho = -\frac{1}{3}\frac{a^3 \cos^3 \omega}{\sin^2 \omega} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{\sin^2 \omega};$$

par suite :

$$V = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sin^2 \omega}\left(1 - \cos^3 \omega\right) = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sin^2 \omega} - \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 \omega\, d\omega}{\sin^2 \omega}.$$

Or,

$$\int \frac{d\omega}{\sin^2 \omega} = -\operatorname{cotg} \omega,$$

$$\int \frac{\cos^3 \omega\, d\omega}{\sin^2 \omega} = \int \frac{\cos \omega\, d\omega}{\sin^2 \omega} - \int \cos \omega\, d\omega = -\frac{1}{\sin \omega} - \sin \omega.$$

Donc,

$$V = \frac{a^3}{3}\left(-\operatorname{cotg} \omega + \frac{1}{\sin \omega} + \sin \omega\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{a^3}{3}\left[\frac{1 - \cos \omega}{\sin \omega} + \sin \omega\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a^3}{3}.$$

Car, $\lim \dfrac{1 - \cos \omega}{\sin \omega} = \lim \dfrac{\sin \omega}{\cos \omega} = 0$, pour $\omega = 0$.

Le volume total $= \dfrac{16\, a^3}{3}$.

7. Une sphère est coupée perpendiculairement à l'un de ses grands cercles par un cylindre ayant pour diamètre le rayon de ce grand cercle. Evaluer le volume de la portion de sphère comprise dans ce cylindre (fig. 15).

Les équations des deux surfaces sont :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = ax. \qquad (2)$$

Nous emploierons les coordonnées polaires, et nous aurons :

$$V = \int\int z\rho \, d\rho \, d\omega.$$

Or, de l'équation de la sphère, on tire, pour la partie au-dessus du plan des xy,

$$z = \sqrt{a^2 - \rho^2}.$$

Les limites de ρ sont données par l'équation (2) : ω étant l'angle du rayon vecteur quelconque $0m$ avec $0A$, les limites de ρ sont $\rho = 0$ et $\rho = a \cos \omega$. En effet, l'équation (2) donne :

$$\rho^2 = a\rho \cos \omega.$$

Les limites de ω sont $\omega = 0$, et $\omega = \frac{\pi}{2}$. On a donc :

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{a \cos \omega} \sqrt{a^2 - \rho^2} . \rho \, d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \left\{ -\frac{1}{3} \left(a^2 - \rho^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right\}_0^{a \cos \omega}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \left[\frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{3} a^3 \sin^2 \omega \right] = \frac{1}{6} \pi a^3 - \frac{2}{9} a^3,$$

pour la partie du volume située au-dessus du plan des xy, et en avant du plan des xz.

Le volume au-dessus du plan des xy sera le double de V :

$$V' = \frac{1}{3} \pi a^3 - \frac{4}{9} a^3.$$

Enfin le volume total qui comprend la partie au-dessus et celle au-dessous du plan des xy, sera :

$$V'' = \frac{2}{3} \pi a^3 - \frac{8}{9} a^3.$$

8. Trouver l'aire de la sphère (fig. 16) dont l'équation est :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

On en tire :

$$p = -\frac{x}{z}, \quad q = -\frac{y}{z} ;$$

par suite,

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{R}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} .$$

On aura donc :

$$A = R \int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{dx\, dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} .$$

Limites. — L'équation du cylindre circonscrit à la surface étant :

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

les limites de y, relatives à la huitième partie de la surface de la sphère sont : $y = 0$ et $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Les limites de x sont, comme on le voit facilement, $x = 0$, et $x = R$.

Or,

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \text{arc sin} \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \text{const.} ;$$

$$\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{\pi}{2} .$$

On a donc :

$$A = \frac{\pi R}{2} \int_0^R dx = \frac{\pi R^2}{2} .$$

L'aire totale $= 8\,A = 4\,\pi\,R^2$.

9. Trouver l'aire de la portion de sphère détachée par le cylindre, dans l'exercice 7, page 133.

Si nous employons les coordonnées polaires, nous aurons :

$$A = \iint \rho \, d\rho \, d\omega \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, .$$

Or,

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \, ;$$

donc,

$$A = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \int_0^{a \cos \omega} \frac{\rho \, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(- \sqrt{a^2 - \rho^2} \right)_0^{a \cos \omega} d\omega$$

$$= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \, (a - a \sin \omega) = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \omega) \, d\omega = \frac{\pi a^2}{2} - a^2.$$

Telle est l'expression de l'aire détachée au-dessus du plan des xy et en avant du plan des xz. L'aire complète au-dessus du plan des xy est $= 2 A = \pi a^2 - 2 a^2$.

L'aire de la portion restante du quart de la sphère sera :

$$\pi a^2 - (\pi a^2 - 2 a^2) = 2 a^2.$$

Si l'on imagine un second cylindre ayant pour diamètre de sa base le rayon 0A′ directement opposé à 0A, la surface détachée par ce second cylindre sera égale à la surface détachée par le premier. La surface totale détachée de la demi-sphère par ces deux cylindres est donc :

$$S = 2 \pi a^2 - 4 a^2.$$

La surface restante sera alors :

$$2 \pi a^2 - S = 4 a^2,$$

c'est-à-dire qu'elle est égale *au carré du diamètre de la sphère*.

Si l'on considère les deux cylindres et la portion qu'ils détachent de la sphère entière, portion qui est évidemment $= 2 S$, on aura :

$$S' = 2 S = 4 \pi a^2 - 8 a^2,$$

et la portion restante sera égale à deux fois le carré du diamètre de la sphère.

10. Trouver la surface commune à une sphère et à un cylindre droit dont l'axe passe par le centre.

Les équations des surfaces sont :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$
$$x^2 + y^2 = a^2.$$

On a pour la huitième partie de l'aire cherchée :

$$A = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dx\, dy. \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

formule dont les limites sont faciles à déterminer, puisque le cylindre donné $x^2 + y^2 = a^2$, est le cylindre circonscrit à la portion de surface qu'il s'agit d'évaluer.

Or, $$\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \text{arc sin} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{R^2 - x^2}}.$$

Par conséquent :

$$A = R \int_0^a dx. \text{arc sin} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{R^2 - x^2}};$$

mais,

$$\int dx. \text{arc sin} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{R^2 - x^2}} = x \,\text{arc sin} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{R^2 - x^2}}$$
$$+ \int \frac{\sqrt{R^2 - a^2}. x^2 dx}{(R^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

En posant $x = a \sin \varphi$, on a :

$$\int \frac{x^2 dx}{(R^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a^2 \sin^2 \varphi\, d\varphi}{R^2 - a^2 \sin^2 \varphi} = \int \frac{R^2 d\varphi}{R^2 - a^2 \sin^2 \varphi} - \int d\varphi$$

$$= R^2 \int \frac{d\varphi}{R^2 \cos^2 \varphi + (R^2 - a^2) \sin^2 \varphi} - \varphi$$

$$= R^2 \frac{1}{R\sqrt{R^2 - a^2}} \text{arc tg } \frac{\text{tg}\,\varphi \sqrt{R^2 - a^2}}{R} - \varphi;$$

par suite,

$$\int_0^a dx \text{ arc sin} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{R^2 - x^2}} = \left(x \text{ arc sin} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{R^2 - x^2}}\right)_0^a$$

$$+ R\left(\text{arc tg} \frac{\text{tg}\,\varphi \sqrt{R^2 - a^2}}{R}\right)_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\varphi \sqrt{R^2 - a^2}\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= R.\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sqrt{R^2 - a^2} = \frac{\pi}{2}\left(R - \sqrt{R^2 - a^2}\right).$$

Donc : $$A = \frac{\pi R}{2}\left(R - \sqrt{R^2 - a^2}\right),$$

et l'aire totale $= 8\,A = 4\,\pi\,R\left(R - \sqrt{R^2 - a^2}\right)$.

Cas particulier. — Si $a = R$, on retrouve l'aire de la sphère $= 4\,\pi\,R^2$, ce qui est évident.

Applications

1. Trouver le volume commun à deux cylindres circulaires droits égaux qui se coupent rectangulairement. (On fera usage des coordonnées rectangulaires.)

2. Le volume de la portion du cylindre ayant pour base le cercle $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$, comprise entre le plan des xy et le paraboloïde $z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$, est donné par la formule :

$$V = \pi R^2 \left[\frac{1}{a}\left(\alpha^2 + \frac{R^2}{4}\right) + \frac{1}{b}\left(\beta^2 + \frac{R^2}{4}\right)\right].$$

3. Le volume de l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

est $=\frac{4}{3}\pi a b c$.

4. Le volume d'une portion de sphère comprise dans un cylindre droit dont l'axe passe par le centre de la sphère est :

$$V=\frac{4}{3}\pi \left\{ R^3-(R^2-a^2)^{\frac{3}{2}} \right\}.$$

5. Le volume total compris entre le paraboloïde elliptique $\frac{z^2}{c}+\frac{y^2}{b}=2x$, et un plan parallèle au plan des yz, et à une distance a de ce dernier est $V=\pi a^2 \sqrt{b c}$.

6. Trouver le volume de la surface :

$$x^2+y^2+(z+c)^2=a^2.$$

7. Trouver le volume que nous avons déterminé (p. 133, nº 7), sans faire usage des coordonnées polaires.

8. Trouver l'aire (p. 135, nº 9), aussi sans faire usage des coordonnées polaires.

9. Déterminer au moyen des coordonnées polaires la portion de surface commune à une sphère et à un cylindre droit dont l'axe passe par le centre (p. 137, nº 10).

10. L'aire de la portion de surface commune à deux cylindres circulaires égaux dont les axes sont perpendiculaires est $A=8a^2$. (Résoudre cette question par les deux méthodes.)

11. L'aire de la portion de surface comprise entre les deux surfaces :

$$x y = a z,$$
$$x^2+y^2=R^2,$$

est :

$$A=\frac{2\pi}{3a}\left\{ (a^2+R^2)^{\frac{3}{2}}-a^3 \right\}.$$

12..Un plan passe par le centre de base d'un cylindre droit en faisant un angle α avec cette base; on demande d'évaluer les volumes des deux portions de cylindre ainsi obtenues. En désignant par h la hauteur du cylindre, on a :

$$V = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha \text{ , et } V' = \pi R^2 h - \frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha.$$

13. On trouve pour les surfaces de ces deux portions :

$$A = 2 R^2 \operatorname{tg} \alpha, \quad A' = 2 \pi R h - 2 R^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

14.Trouver le volume d'une portion du paraboloïde elliptique

$$z = x^2 + 3 y^2,$$

comprise entre le plan des xy, et un plan donné ($z = c$).

15. Trouver le volume du corps

$$z^2 - 2z + 2y^2 + x^2 - xy - 1 = 0.$$

16. Trouver le volume du corps

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz - a^2 = 0.$$

ERRATA.

p. 12, ligne 3 en bas, au lieu de $e_x = u$, lisez $e^x = u$.

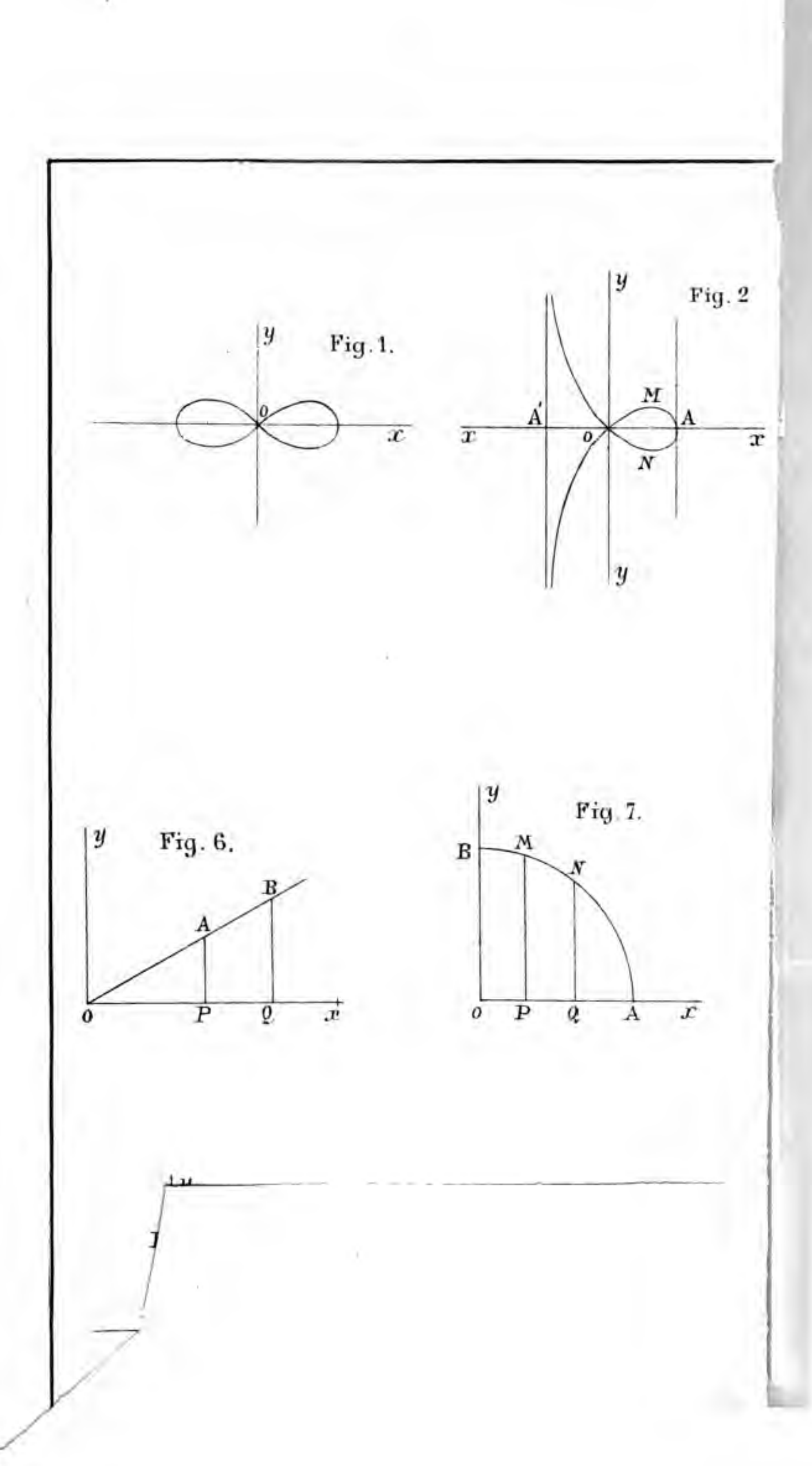
p 19, ligne 4 en bas, au lieu de $l(x \quad 1)$, lisez $l(x - 1)$, et au lieu de a, lisez $l\,a$

p.101, ligne 6 en bas, au lieu de $\int \frac{\sqrt{1+z^2 dz}}{z}$, lisez $\int \frac{\sqrt{1+z^2}\,.\,dz}{z}$.

p. 101, ligne 14, au lieu de $\int_1^2$ lisez $\int_1^z$.

p. 131, ligne 1, supprimez φ.

TABLE DES MATIÈRES.


Fig. 1.
y
o
x
Fig. 2
y
M
A'
A
x
o
x
N
y
Fig. 6.
y
B
A
o
P
Q
x
Fig. 7.
y
B
M
N
o
P
Q
A
x

